БИБЛИОТЕКА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ОДСЕК Математика
ИНВ. БРОЈ 688
КОСОВСКА МИТРОВИЦА

Dr DUŠAN ADNAĐEVIĆ • Dr ZORAN KADELBURG

MATEMATIČKA ANALIZA

II

TREĆE IZDANJE

NAUKA

BEOGRAD.

Dr Dušan Adnađević, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Dr Zoran Kadelburg, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

MATEMATIČKA ANALIZA II
treće izdanje

Izdavač

„NAUKA"
11000 Beograd, Bulevar revolucije 314/25
telefon (011) 42 18 34

Recenzenti

Dr Branislav Mirković, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Dr Miodrag Mateljević, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

Za izdavača

Nikola Dončev, glavni i odgovorni urednik

Urednik

Marija Nenadović-Dončev

Tiraž 1000 primeraka

Štampa "GRAFOMED" Bor

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik pisan je po važećem programu predmeta Matematička analiza II za studente Matematičkog fakulteta u Beogradu. Verujemo da će moći da ga koriste i studenti drugih fakulteta, posebno prirodnih i tehničkih nauka, na kojima je matematička analiza predmet izučavanja.

Po svojoj koncepciji ova knjiga je nastavak našeg udžbenika Matematička analiza I*, tako da se sve napomene date u predgovoru tog udžbenika odnose i na ovaj. Prilikom pozivanja, pomenuti udžbenik je označen sa M. A. I. Posebno, treba naglasiti da nismo težili da u izlaganju dospemo do najviših dometa savremene analize, već smo želeli da studentima ponudimo udžbenik koji bi im omogućio da nauče osnovne pojmove i činjenice ove fundamentalne matematičke discipline. Verujemo da će tako biti osposobljeni da lakše usvoje neke teže i apstraktnije teorije u daljem izučavanju matematike.

Dr Branislav Mirković i dr Miodrag Mateljević, u svojstvu recenzenata, pažljivo su pročitali rukopis i dali niz korisnih primedbi i sugestija. Zadovoljstvo nam je da im se zahvalimo što su time učinili da udžbenik postane bolji. Zahvaljujemo se i svim kolegama i studentima koji su nam skrenuli pažnju na propuste u ranijim izdanjima ove knjige.

Beograd, septembra 1999. *Autori*

*peto izdanje, „Nauka", Beograd 1998.

SADRŽAJ

1. FUNKCIONALNI NIZOVI I REDOVI 9
   1. 1. Obična i ravnomerna konvergencija 9
   1. 2. Ravnomerna konvergencija funkcionalnih redova 13
   1. 3. Funkcionalna svojstva granične funkcije 18
   1. 4. Stepeni redovi. Analitičke funkcije 25
   1. 5. Prostor $C[a, b]$. Aproksimacija neprekidnih funkcija polinomima 32
   Zadaci 35
2. DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH . . 39
   2. 1. Parcijalni izvodi i diferencijabilnost realnih funkcija 39
   2. 2. Diferencijabilnost vektorskih funkcija 46
   2. 3. Pravila diferenciranja 49
   2. 4. Teorema o srednjoj vrednosti 52
   2. 5. Parcijalni izvodi višeg reda. Tejlorova formula 55
   2. 6. Lokalni ekstremumi 59
   Zadaci 65
3. IMPLICITNE FUNKCIJE 68
   3. 1. Postavka zadatka 68
   3. 2. Implicitne funkcije sa realnim vrednostima 69
   3. 3. Implicitne funkcije sa vektorskim vrednostima 74
   3. 4. Teorema o inverznoj funkciji 79
   3. 5. Zavisnost funkcija 81
   3. 6. Uslovni ekstremumi 84
   Zadaci 90
4. NEKE PRIMENE DIFERENCIJALNOG RAČUNA U GEOMETRIJI 93
   4. 1. Krive u prostoru $\mathbf{R}^n$ 93
   4. 2. Tangenta 97
   4. 3. Krivina. Evoluta 100
   4. 4. Fundamentalni triedar 103
   4. 5. Singularne tačke ravnih krivih 110
   4. 6. Glatke površi u prostoru $\mathbf{R}^n$ 113
   4. 7. Tangentna ravan i normala 116
   4. 8. Prva kvadratna forma površi 119
   4. 9. Singularne tačke površi u prostoru $\mathbf{R}^3$ 121
   4.10. Klasifikacija tačaka na površi 122
   Zadaci 127

5. VIŠESTRUKI INTEGRALI 130
5. 1. Žordanova mera 130
5. 2. n-integral 135
5. 3. Svojstva n-integrala 146
5. 4. Svođenje n-integrala na n-tostruki integral 150
5. 5. Smena promenljivih 156
5. 6. Primena integrala 167
5. 7. Nesvojstveni integral 172
Zadaci 177
6. KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI 183
6. 1. Krivolinijski integral prve vrste 183
6. 2. Krivolinijski integral druge vrste 188
6. 3. Nezavisnost integracije od putanje. Grinova teorema 194
6. 4. Stiltjesov integral 203
6. 5. Površinski integral prve vrste 213
6. 6. Površinski integral druge vrste 216
6. 7. Gradijent, divergencija, rotor 220
6. 8. Stoksova formula 227
6. 9. Formula Gausa-Ostrogradskog 231
Zadaci 235
7. INTEGRALI KAO FUNKCIJE PARAMETRA 241
7. 1. Svojstveni parametarski integrali 241
7. 2. Nesvojstveni integrali. Ravnomerna konvergencija 245
7. 3. Funkcionalna svojstva 249
7. 4. Ojlerovi integrali 256
Zadaci 263
8. FURIJEOVI REDOVI 267
8. 1. Hilbertov prostor 267
8. 2. Ortonormirani sistemi i Furijeovi redovi 270
8. 3. Potpunost trigonometrijskog sistema 277
8. 4. Obična konvergencija trigonometrijskog Furijeovog reda 280
8. 5. Uslovi ravnomerne konvergencije. Diferenciranje i integracija trigonometrijskog reda 289
8. 6. Furijeov integral 293
Zadaci 299
Indeks pojmova 302
Literatura 307

1. FUNKCIONALNI NIZOVI I REDOVI

1.1. OBIČNA I RAVNOMERNA KONVERGENCIJA

Kada su članovi nekog konvergentnog niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ realni brojevi, tada je njegov limes $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ fiksiran element skupa $\overline{\mathbf{R}}$. No, ako članovi tog niza zavise još od neke promenljive, tj. oblika su $a_n(x)$, $x \in A \subset \mathbf{R}$, tada i granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ predstavlja funkciju od x, pri čemu x pripada nekom (moguće manjem od A) skupu $B \subset \mathbf{R}$:

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x), \quad x \in B.$$

Za konkretno zadate nizove $\big(a_n(x)\big)$, čak i u slučaju da su $a_n(x)$ elementarne funkcije (s kakvim smo se do sada najčešće susretali) relativno je retko moguće eksplicitno odrediti funkciju $a(x)$. Specijalno, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, za one x za koje konvergira, definiše neku funkciju $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, gde je $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$; međutim, vrednost $s(x)$ po pravilu ne možemo eksplicitno da izračunamo. Zato je logično postaviti problem ispitivanja osobina granične funkcije $a(x)$ (odnosno, u slučaju reda, $s(x)$) samo na osnovu poznatih osobina funkcija $a_n(x)$. Navedimo, međutim, nekoliko primera koji pokazuju da neposredno prenošenje osobina funkcija $a_n(x)$ na graničnu funkciju u opštem slučaju nije moguće.

Primeri 1.1.1

1° Neka je $A = \mathbf{R}$, $a_n\colon A \to \mathbf{R}$ data sa $a_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Jasno je da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ postoji ako i samo ako $x \in B = (-1, 1]$ i da je

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{ako } x = 1. \end{cases}$$

Primetimo da je $a\colon B \to \mathbf{R}$ prekidna funkcija, mada su $a_n|B$ neprekidne za svako $n \in \mathbf{N}$.

2° Niz funkcija

$$a_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

ima za graničnu funkciju $a(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Primetimo, međutim, da $\int_0^1 a_n(x)\,dx = 1 - e^{-n^2}$ ima graničnu vrednost 1 kad $n \to \infty$, dok je $\int_0^1 a(x)\,dx = 0$. Dakle, u ovom slučaju,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,dx.$$

3° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$ po Dirihleovom kriterijumu (stav 10.4.7 iz M.A.I). Njegovi članovi $a_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ su diferencijabilne funkcije, međutim, njihovi izvodi $a_n'(x) = \cos nx$ su članovi divergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$. Dakle, o diferencijabilnosti zbira funkcionalnog reda ne može se zaključivati samo na osnovu diferencijabilnosti njegovih sabiraka. ▲

Primetimo da se u svim navedenim primerima u suštini radilo o problemu promene redosleda dva granična prelaza. Na primer, u slučaju 1° pitanje o neprekidnosti funkcije $a(x)$ u tački $x = 1$ je u stvari pitanje o tačnosti sledeće jednakosti:

$$\lim_{x\to 1-0} \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} a_n(x).$$

Podsetimo se da smo, u nešto drugačijem obliku, sličan problem imali i u slučaju tzv. uzastopnih limesa funkcija više promenljivih (v. stav 9.2.4 iz M.A.I i njegovu posledicu). Tada smo takođe navodili primere koji pokazuju da, bez dodatnih pretpostavki, takva promena poretka limesa u opštem slučaju nije dozvoljena.

U ovoj glavi bavićemo se uglavnom problemima ispitivanja funkcija zadatih kao granične vrednosti nekog funkcionalnog niza ili reda, pri čemu će osnovno biti da se nađu dovoljni uslovi koji obezbeđuju razmenu limesa, slično kao u navedenim primerima, i na taj način o osobinama granične funkcije zaključi na osnovu osobina funkcija $a_n(x)$. Imajući, međutim, u vidu neke kasnije slične primene na tzv. parametarske integrale (v. glavu 7), osnovne definicije i stavove daćemo u nešto opštijem obliku. Naime, umesto funkcionalnog niza $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$, koji možemo shvatiti kao familiju funkcija parametrizovanu (indeksiranu) prirodnim parametrom $n \in \mathbf{N}$, posmatraćemo familiju funkcija $\{ f_t(x) \mid t \in T \}$, $T \subset \mathbf{R}$, parametrizovanu proizvoljnim realnim parametrom t. Recimo, u primeru 1.2° možemo uzeti

$$f_t(x) = 2t^2 x e^{-t^2x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \in \mathbf{R}$$

i tražiti

$$\lim_{t\to\infty} f_t(x) = f(x) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Definicija 1.1.1

Neka je $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa $T \subset \mathbf{R}$ i neka je $A \subset \mathbf{R}$. Familija funkcija $\{f_t \colon A \to \mathbf{R} \mid t \in T\}$ *konvergira* funkciji $f \colon A \to \mathbf{R}$ kad $t \to t_0$ ako za svako $x \in A$ važi

$$f(x) = \lim_{t\to t_0} f_t(x).$$

Pišemo i $f_t(x) \to f(x)$ $(t \to t_0)$ za $x \in A$, ili samo $f_t \to f$ $(t \to t_0)$ na A. Još se kaže da u tom slučaju funkcije f_t teže funkciji f *u običnom smislu* ili *tačka-po-tačka*. Dakle:

$$f_t \to f \quad (t \to t_0) \text{ na } A \iff$$
$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon, x))(\forall t \in T)(t \in U_{t_0} \Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Definicija 1.1.2

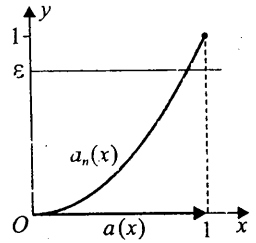
Neka je $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa $T \subset \mathbf{R}$ i neka je $A \subset \mathbf{R}$. Familija funkcija $\{f_t \colon A \to \mathbf{R} \mid t \in T\}$ *ravnomerno (uniformno) konvergira* funkciji $f \colon A \to \mathbf{R}$ na A kad $t \to t_0$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći okolina U_{t_0} tačke t_0 (koja zavisi samo od ε) takva da za sve $t \in U_{t_0}$ i sve $x \in A$ važi $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pišemo $f_t(x) \rightrightarrows f(x)$ $(t \to t_0)$ na A ili samo $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na A. Dakle:

$$f_t \rightrightarrows f \quad (t \to t_0) \text{ na } A \iff$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon))(\forall x \in A)(\forall t \in T)(t \in U_{t_0} \Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

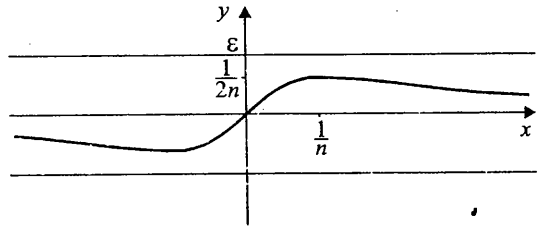
Primetimo da smo u prethodnim definicijama pisali $t \in U_{t_0}$ umesto $t \in U_{t_0}$, $t \neq t_0$, što bi bilo pravilnije. Da bismo pojednostavili zapisivanje, tako ćemo činiti i ubuduće.

Uočimo odmah razliku između pojmova uvedenih definicijama 1 i 2. Očigledno je da ako $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na A, tada i $f_t \to f$ $(t \to t_0)$ na A, jer izabrana okolina U_{t_0} „odgovara" i svim posebno izabranim $x \in A$. Obrnuto, međutim, ne mora biti tačno, jer se u slučaju obične konvergencije okoline U_{t_0} biraju zavisno od $x \in A$ i nije sigurno da li se može naći okolina koja bi „odgovarala" svakom takvom x. Recimo, u primeru 1.1° za svako fiksirano x, $0 < x < 1$, važi $|a_n(x)| = x^n < \varepsilon$ za $n > \ln\varepsilon / \ln x$, međutim $\ln\varepsilon / \ln x \to \infty$ kad $x \to 1 - 0$, te se ne može odrediti n_0 tako da je za $n > n_0$ ispunjeno $|a_n(x)| < \varepsilon$ istovremeno za sve $x \in (0,1)$.

Ilustrujmo ovaj zaključak i na slici 1. Za dato x, $0 < x < 1$, i dato ε, $0 < \varepsilon < 1$, kriva $y = x^n$ biće „ispod" prave $y = \varepsilon$ za dovoljno veliko n. Međutim, ma kako bilo veliko n, ta kriva će uvek imati deo (sa apscisom dovoljno bliskom jedinici) koji će izlaziti izvan trake ograničene x-osom i pravom $y = \varepsilon$.



Sl. 1.1.1



Sl. 1.1.2

Dakle, niz $a_n(x) = x^n$ konvergira obično na intervalu $(0,1)$ funkciji $a(x) \equiv 0$, ali ta konvergencija nije ravnomerna.

Navedimo još nekoliko primera.

БИБЛИОТЕКА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ОДСЕК Математика
ИНВ. БРОЈ 648

PRIMERI 1.1.2

1° Neka je $a_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Očito je da je, za sve $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = 0$. Pri tom je $|a_n(x)| = \dfrac{1}{2n} \cdot \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ za $x \in \mathbf{R}$, pa, kako je $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$ za dovoljno veliko n, to zaključujemo da $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ na $\mathbf{R}$.

Na slici 2 je prikazan grafik funkcije $a_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; on ima ekstremne vrednosti jednake $\pm 1/2n$ u tačkama $x = \pm 1/n$, tako da se, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko n, ceo grafik nalazi u traci $|y| < \varepsilon$.

2° Familija funkcija $f_t(x) = \sin tx$, $x \in \mathbf{R}$, sa parametrom $t \in \mathbf{R}$ ima za graničnu funkciju $f(x) = 0$ kad $t \to 0$. Međutim, $f_t(x)$ ne teži $f(x)$ ravnomerno na $\mathbf{R}$, jer je, za fiksirano $t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} |\sin tx| = 1$. Prepuštamo čitaocu da proveri da ipak važi $f_t(x) \rightrightarrows f(x)$ $(t \to 0)$ na svakom konačnom intervalu $[a,b]$. ▲

Navedimo još jednu formulaciju uslova ravnomerne konvergencije. Za datu familiju funkcija $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R})$ koja teži tačka-po-tačka, kad $t \to t_0$, funkciji $f\colon A \to \mathbf{R}$ označimo za $t \in T$ i $x \in A$:

$$r_t(x) = |f_t(x) - f(x)| \qquad \text{i} \qquad r_t = \sup_{x\in A} r_t(x).$$

Jasno je da tada:

$$f_t(x) \to f(x) \quad (t \to t_0) \quad \text{na } A \iff (\forall x \in A) \lim_{t\to t_0} r_t(x) = 0,$$

$$f_t(x) \rightrightarrows f(x) \quad (t \to t_0) \quad \text{na } A \iff \lim_{t\to t_0} r_t = 0,$$

pa je i odatle jasno da $f_t \rightrightarrows f$ povlači $f_t \to f$, ali da obrnuto ne mora da važi.

Recimo, u primeru 2.1° je $r_n(x) = \dfrac{|x|}{1+n^2x^2}$ i $r_n = \dfrac{1}{2n}$, pa važi $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ i $a_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\mathbf{R}$. U primeru 2.2° je, međutim, $r_t(x) = |\sin tx|$ i $r_t = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} r_t(x) = 1$, pa ne važi $\lim\limits_{t\to 0} r_t = 0$ ni $f_t(x) \rightrightarrows 0$ $(t \to 0)$ na $\mathbf{R}$.

Košijev princip konvergencije

Kao i u nekim drugim slučajevima koje smo imali prilike da proučavamo, i za ravnomernu konvergenciju familije funkcija (sa vrednostima u $\mathbf{R}$) može se dokazati opšti Košijev neophodan i dovoljan uslov, zahvaljujući kompletnosti prostora $\mathbf{R}$. On, kao i obično, omogućava da se o ravnomernoj konvergenciji sudi samo na osnovu poznavanja osobina samih funkcija $f_t(x)$ date familije, ne poznajući graničnu funkciju $f(x)$.

TEOREMA 1.1.1

Neka je t_0 tačka nagomilavanja skupa $T \subset \mathbf{R}$ i $A \subset \mathbf{R}$. Familija funkcija $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ ravnomerno konvergira na A kad $t \to t_0$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon)$ tačke t_0, takva da za svake dve vrednosti $t_1, t_2 \in U_{t_0} \cap T$ i za svako $x \in A$ važi $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$. Dakle:

$f_t(x)$ *ravnomerno konvergira na* A $(t \to t_0)$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists U_{t_0})(\forall t_1, t_2 \in T \cap U_{t_0})(\forall x \in A)\ |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon.$$

Dokaz.

Pretpostavimo, najpre, da $f_t(x) \rightrightarrows f(x)$ $(t \to t_0)$ na A i za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo U_{t_0} tako da za svako $x \in A$ i sve $t \in U_{t_0} \cap T$ važi $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Tada će za proizvoljne $t_1, t_2 \in U_{t_0} \cap T$ i sve $x \in A$ važiti

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f_{t_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{t_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je uslov teoreme zadovoljen.

Obrnuto, iz navedenog uslova, fiksiranjem $x \in A$, zaključujemo da sledi da $f_t(x)$, kao funkcija od $t \in T$, zadovoljava Košijev uslov za postojanje granične vrednosti $\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x) = f(x)$. U nejednakosti $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon/2$ (koja, po pretpostavci, važi za sve $x \in A$ i za sve t_1, t_2 iz pogodno odabrane okoline U_{t_0}) pređimo na limes kad $t_2 \to t_0$. Dobijamo $|f_{t_1}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ za sve $t_1 \in U_{t_0} \cap T$ i sve $x \in A$, što i znači da $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na A. ■

Čitaocu prepuštamo da formuliše poseban slučaj ove teoreme kada se, umesto proizvoljne familije, posmatra funkcionalni niz $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$.

1.2. RAVNOMERNA KONVERGENCIJA FUNKCIONALNIH REDOVA

Najvažniji specijalan slučaj konvergencije familije funkcija koji ćemo proučavati u ovoj glavi jeste konvergencija funkcionalnih redova. Neka je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

takav red, gde su $a_n\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R})$ realne funkcije i neka je $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ njegova n-ta parcijalna suma. Konkretizujući definicije 1.1 i 1.2 dolazimo do sledećih pojmova:

Za red (1) kažemo da *u običnom smislu* (ili *tačka-po-tačka*) *konvergira* na skupu A ako njegov niz parcijalnih suma $s_n(x)$ konvergira na A, tj. ako postoji funkcija $s\colon A \to \mathbf{R}$, takva da je za svako $x \in A$ ispunjeno $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. Za red (1) kažemo da *ravnomerno* (*uniformno*) *konvergira* na skupu A ako pored toga važi $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ $(n \to \infty)$ na A, tj. ako njegov ostatak $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ravnomerno na A teži nuli kad $n \to \infty$.

PRIMERI 1.2.1

1° Red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira za $x \in (-1,1)$ i njegov zbir je $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Za njegov ostatak $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$, pri fiksiranom $n \in \mathbf{N}$, važi $\lim\limits_{x\to 1-0} r_n(x) = +\infty$. Zbog toga ne važi $r_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ na $(-1,1)$, pa dati red ne konvergira ravnomerno na $(-1,1)$.

2° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ konvergira ravnomerno na $\mathbf{R}$. Zaista, na osnovu Lajbnicovog kriterijuma (stav 10.3.2 i zadatak 10.10 iz M.A.I) taj red konvergira za sve $x \in \mathbf{R}$ i za njegov ostatak $r_n(x)$ važi

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

što znači da $r_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ na $\mathbf{R}$. ▲

Osnovni Košijev princip konvergencije (teorema 1.1) primenjen na funkcionalne redove glasi:

Teorema 1.2.1

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *ravnomerno konvergira na* $A \subset \mathbf{R}$ *ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takvo da za sve* $n \in \mathbf{N}$ *za koje je* $n > n_0$ *i sve* $p \in \mathbf{N}$ *važi*

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

istovremeno za sve $x \in A$. *Simbolički zapisano:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ ravnomerno konvergira na } A \iff$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in A)(\forall n, p \in \mathbf{N})\,(n > n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon).$$ ■

Posledica 1.2.1

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *ravnomerno konvergira na* $A \subset \mathbf{R}$, *tada* $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ *na* A.

Dokaz.

Ovo tvrđenje dobijamo iz prethodne teoreme stavljajući $p = 1$ i uzimajući u obzir definiciju 1.2 ravnomerne konvergencije niza. ■

Kao i kod konvergencije numeričkih redova, neophodan uslov ravnomerne konvergencije reda naveden u posledici 1 nije dovoljan.

Primer 1.2.2

Funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergira za $x \in [-1,1)$. Zaista, za $|x| < 1$ on konvergira apsolutno, na primer po Dalamberovom kriterijumu (stav 10.2.2 iz M.A.I), a za $x = -1$ po Lajbnicovom. Pri tom je za $x \in [-1,1)$ ispunjeno $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$, pa $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ na $[-1,1)$. Međutim, ovaj red ne konvergira ravnomerno na $[-1,1)$. U to se možemo uveriti primenom teoreme 1, jer je za x dovoljno blisko jedinici ispunjeno

$$\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n}\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) > \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4},$$

tj. za dato ε, $0 < \varepsilon < 1/4$, ne može se naći $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $x \in [-1,1)$, svako $n > n_0$ i, na primer, $p = n$ bude ispunjeno $\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n}\right| < \varepsilon$. ▲

Konvergencija redova se, po definiciji, svodi na konvergenciju nizova. Međutim, kao što već znamo iz teorije numeričkih redova, za ispitivanje njihove konvergencije postoje brojni kriterijumi. Slično je, kao što ćemo sada videti, i sa ravnomernom konvergencijom redova. Zato je od značaja primetiti da se ispitivanje konvergencije (odnosno ravnomerne konvergencije) svakog funkcionalnog niza može svesti na ispitivanje konvergencije (odnosno ravnomerne konvergencije) nekog funkcionalnog reda. Naime, umesto niza $(a_n(x))$ možemo posmatrati red

$$a_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+1}(x) - a_n(x)]$$

čiji se niz parcijalnih suma (do na nebitnu promenu indeksa) poklapa sa nizom $(a_n(x))$.

Navedimo sada neke specijalne kriterijume za ravnomernu konvergenciju funkcionalnih redova. Najjednostavniji i najčešće primenjivan je sledeći *Vajerštrasov kriterijum*:

Stav 1.2.1

Ako postoji niz $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *realnih brojeva, takav da*

1° *postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takvo da za sve* $n > n_0$ *i svako* $x \in A$ *važi* $|a_n(x)| \leqslant c_n$;

2° *red* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergira,*

tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *ravnomerno konvergira na* A.

Dokaz.

Nije ograničenje opštosti ako pretpostavimo da nejednakost $|a_n(x)| \leqslant c_n$ važi za sve $n \in \mathbf{N}$ i sve $x \in A$. Kako je za $x \in A$:

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| \leqslant c_{n+1} + \cdots + c_{n+p},$$

i kako iz 2° sledi da se zbir $c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}$ može učiniti proizvoljno malim za dovoljno veliko n i svako p, to tvrđenje stava sledi iz Košijeve teoreme 1. ■

Primeri 1.2.3

1° Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira (tj. ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$), tada redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ ravnomerno konvergiraju na $\mathbf{R}$ po Vajerštrasovom kriterijumu.

2° Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ na skupu $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}$. Njegov opšti član se na skupu A može po apsolutnoj vrednosti majorirati opštim

članom reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gde je $c_n = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$. Kako je $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0 < 1$, to red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma, pa sledi ravnomerna konvergencija datog funkcionalnog reda na skupu A. ▲

Očigledno je da u slučaju da se o ravnomernoj konvergenciji na A funkcionalnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ može zaključiti na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, onda taj red mora i apsolutno konvergirati na A, tj. za svako $x \in A$ red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ mora biti konvergentan (štaviše, ovaj poslednji red mora biti ravnomerno konvergentan na A). Kao što ćemo uskoro videti, postoje redovi koji su ravnomerno, ali ne i apsolutno konvergentni; za takve redove, dakle, ravnomerna konvergencija se ne može dokazati primenom ovog jednostavnog kriterijuma. Navešćemo sada neke kriterijume koji se mogu primenjivati u takvim situacijama. Za njihovo dokazivanje koristićemo lemu 10.4.1 iz M.A.I.

Stav 1.2.2 *(Abelov kriterijum)*

Neka je

1° *funkcionalni red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *ravnomerno konvergentan na* $A \subset \mathbf{R}$;

2° $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *je, za svako* $x \in A$, *monoton niz (po* n*) koji je ravnomerno ograničen, tj. za neko* $K \in \mathbf{R}$ *važi* $|a_n(x)| \leqslant K$ *za sve* $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *ravnomerno konvergira na* A.

Dokaz.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Na osnovu pretpostavke 1° i teoreme 1 postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da za svako $x \in A$ i sve $n > n_0$, $p \in \mathbf{N}$ važi

$$|b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Koristeći lemu 10.4.1 iz M.A.I dobijamo da je za sve $x \in A$, $n > n_0$ i $p \in \mathbf{N}$ ispunjeno

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K}(K + 2K) = \varepsilon,$$

što na osnovu Košijevog kriterijuma znači da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ ravnomerno konvergentan na A. ■

Stav 1.2.3 *(Dirihleov kriterijum)*

Neka

1° *funkcionalni red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *ima ravnomerno ograničene parcijalne sume, tj. postoji konstanta* K, *takva da je za sve* $n \in \mathbf{N}$ *i svako* $x \in A$ *ispunjeno* $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant K$;

2° $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *je, za svako* $x \in A$, *monoton niz i važi* $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ *na* A.

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *ravnomerno konvergentan na* A.

Dokaz.

Za dato $\varepsilon > 0$ odredimo $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n > n_0$ i svako $x \in A$ važi $|a_n(x)| < \varepsilon/6K$. Na osnovu pretpostavke 1° imamo da je za sve n, $p \in \mathbf{N}$ i svako $x \in A$ ispunjeno

$$|b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+p}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant 2K.$$

Ponovo primenjujući lemu 10.4.1 iz M.A.I dobijamo da je tada

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2K\left(\frac{\varepsilon}{6K} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6K}\right) = \varepsilon,$$

pa tvrđenje i ovog stava sledi na osnovu Košijevog kriterijuma. ■

Primeri 1.2.4

1° Posmatrajmo redove

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

i pretpostavimo (za razliku od primera 3.1°) da je niz (a_n) monoton i da teži nuli. Uslov 2° Dirihleovog kriterijuma je tada ispunjen za $a_n(x) \equiv a_n$. Proverimo da li važi i uslov 1°. Primetimo da za $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, važi

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Posmatrajmo zato date redove na nekom segmentu $[a, b]$ koji ne sadrži nijednu tačku oblika $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Tada iz prethodnog sledi da postoji konstanta K, takva da za sve $x \in [a, b]$ i za sve $n \in \mathbf{N}$ važi $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant K$, te je, na osnovu Dirihleovog kriterijuma, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ ravnomerno konvergentan na $[a, b]$. Slično se izvodi da isto važi i za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Ako segment $[a, b]$ na kome se posmatraju dati redovi sadrži neku od tačaka oblika $x_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ za $x = x_0$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Što se tiče reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, on konvergira i za $x = x_0$ (jer mu je opšti član tada identički jednak nuli), međutim, ipak se može dogoditi da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ na $[a, b]$ bude neravnomerna. Na primer, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konvergira na $[0, 2\pi]$ neravnomerno, u šta se možemo lako uveriti, recimo, primenom Košijeve teoreme 1.

2° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$ ravnomerno konvergira na $[0,\infty)$ po Abelovom kriterijumu. Zaista, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, pa i ravnomerno konvergira (na proizvoljnom skupu); s druge strane, $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ je, za fiksirano $x \in [0,\infty)$, monoton niz i za svako $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0,\infty)$ važi $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant 1$. ▲

1.3. FUNKCIONALNA SVOJSTVA GRANIČNE FUNKCIJE

Promena poretka graničnih prelaza

Pristupimo sada rešavanju osnovnog zadatka ove glave — ispitivanju osobina funkcija zadatih kao granice nekih familija funkcija (specijalno, funkcionalnih nizova i redova). Kao što smo već pomenuli, većina problema koji se pri tom javljaju jesu problemi promena poretka dvaju graničnih prelaza. Najčešći dovoljan (ali ne i neophodan!) uslov koji obezbeđuje takvu promenu jeste ravnomerna konvergencija graničnoj funkciji.

Teorema 1.3.1

Neka je $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R})$ *familija realnih funkcija,* $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* T *i* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* A. *Ako*

1° $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ *na* A,

2° *za svako* $t \in T$ *postoji* $\lim_{x\to a} f_t(x) = b_t$,

tada postoje $\lim_{x\to a} f(x)$ *i* $\lim_{t\to t_0} b_t$ *i važi* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to t_0} b_t$, *tj.*

$$\lim_{x\to a}\lim_{t\to t_0} f_t(x) = \lim_{t\to t_0}\lim_{x\to a} f_t(x).$$

Dokaz.

Iz uslova 1°, na osnovu Košijeve teoreme 1.1, sledi da se za dato $\varepsilon > 0$ može naći okolina U tačke t_0, takva da za sve $t_1, t_2 \in T \cap U$ i svako $x \in A$ važi

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon.$$

Odatle, korišćenjem uslova 2°, dobijamo da za sve $t_1, t_2 \in T \cap U$ važi $|b_{t_1} - b_{t_2}| \leqslant \varepsilon$. Dakle, familija brojeva b_t (shvaćena kao funkcija iz T u $\mathbf{R}$) zadovoljava Košijev uslov za postojanje granične vrednosti $\lim_{t\to t_0} b_t = b$. Dokažimo da je i $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Za proizvoljno $t \in T$ i $x \in A$ važi

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_t(x)| + |f_t(x) - b_t| + |b_t - b|.$$

Svaki od tri sabirka na desnoj strani ove nejednakosti može se učiniti proizvoljno malim. Zaista, na osnovu pretpostavke 1°, može se naći okolina U tačke t_0, takva da je za sve $x \in A$ i $t \in T \cap U$ ispunjeno $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon/3$. Dalje, zbog $\lim_{t\to t_0} b_t = b$, može se naći okolina V tačke t_0, takva da za $t \in T \cap V$ važi $|b_t - b| < \varepsilon/3$. Za proizvoljno $t \in T \cap U \cap V$, na osnovu 2°, odredimo okolinu W tačke a, tako da je $|f_t(x) - b_t| < \varepsilon/3$ za sve $x \in W \cap A$. Za takve x je onda $|f(x) - b| < \varepsilon$, pa važi $\lim_{x\to a} f(x) = b$. ■

Neposredna posledica ove osnovne teoreme je sledeće važno tvrđenje.

Teorema 1.3.2

Ako familija funkcija $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R})$, *neprekidnih u tački* $a \in A$, *ravnomerno na* A, *kad* $t \to t_0 \in T'$, *konvergira funkciji* $f\colon A \to \mathbf{R}$, *tada je i funkcija* f *neprekidna u tački* a. ■

Primetimo da, s obzirom da limes funkcije u tački, kao i njena neprekidnost, zavise samo od osobina funkcije u nekoj, proizvoljno maloj, okolini te tačke, u teoremama 1 i 2 uslov ravnomerne konvergencije familije f_t na skupu A može se zameniti uslovom ravnomerne konvergencije na nekoj okolini tačke a. Ovom napomenom često se možemo koristiti pri praktičnom dokazivanju neprekidnosti granične funkcije ili nalaženju njenog limesa (v. dalje primer 4).

Čitaocu prepuštamo da teoreme 1 i 2 preformuliše za slučaj kada se umesto proizvoljne familije funkcija posmatra funkcionalni niz. Ovde dajemo formulaciju odgovarajućih stavova za funkcionalne redove.

Posledica 1.3.1

Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *ravnomerno konvergentan na* A *i neka, u nekoj tački* a *koja je tačka nagomilavanja skupa* A, *postoji* $\lim_{x\to a} a_n(x)$, *za svako* $n \in \mathbf{N}$. *Tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} a_n(x)$ *konvergira i važi*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} a_n(x). \quad ■$$

Kaže se još da se granična vrednost $\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ može naći „ulaskom pod znak sume".

Posledica 1.3.2

Neka su $a_n\colon A \to \mathbf{R}$, *za svako* $n \in \mathbf{N}$, *neprekidne funkcije u tački* $a \in A$ *i neka red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *ravnomerno konvergira u nekoj okolini tačke* a. *Tada je i* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *neprekidna funkcija u tački* a. ■

PRIMERI 1.3.1

1° U primeru 1.1.1° videli smo da niz $a_n(x) = x^n$ neprekidnih funkcija na $(-1, 1]$ konvergira, kad $n \to \infty$, funkciji

$$a(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{ako } x = 1, \end{cases}$$

koja je prekidna u tački $x = 1$. Na osnovu posledice 2 (ponovo) zaključujemo da $a_n(x)$ ne teži $a(x)$ ravnomerno na $(-1, 1]$.

2° Posmatrajmo funkcionalni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}], \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Parcijalne sume toga reda su $s_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$, a njegov zbir je $s(x) = \lim_{n\to\infty} 2n^2 x e^{-n^2x^2} = 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$. Dokažimo, međutim, da ovaj red ne konvergira ravnomerno na $\mathbf{R}$.

Zaista, lako se proverava da je

$$\max_{x\in\mathbf{R}} |s_n(x)| = s_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = n\sqrt{\frac{2}{e}},$$

pa je jasno da ni za jedno $\varepsilon > 0$ ne može važiti $|s_n(x)| < \varepsilon$ istovremeno za sve $x \in \mathbf{R}$, ma kako veliko bilo n.

Primetimo, međutim, da su i članovi i zbir ovog neravnomerno konvergentnog reda neprekidne funkcije na $\mathbf{R}$. ▲

Prethodni primer pokazuje da uslov ravnomerne konvergencije u teoremama 1 i 2 i njihovim posledicama, mada bitan (jer bez njega ta tvrđenja prestaju da važe), ipak nije neophodan. Postoji, međutim, jedna važna specijalna situacija kada je ravnomerna konvergencija neophodan uslov neprekidnosti granične funkcije.

STAV 1.3.1 (Dini*)

Neka je $K \subset \mathbf{R}$ kompaktan (dakle, zatvoren i ograničen) skup i neka je $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ monoton (po n) niz funkcija neprekidnih na K. Ako $a_n(x) \to a(x)$ $(n \to \infty)$ na K i ako je $a\colon K \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija, tada $a_n \rightrightarrows a$ $(n \to \infty)$ na K.

Dokaz.

Pretpostavimo da je, na primer, a_n rastući niz, tj. da za svako n (ili počev od nekog n) i svako $x \in K$ važi $a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$ dati realan broj. Za svako $x \in K$ nađimo indeks $n_x \in \mathbf{N}$, takav da važi $0 \leqslant a(x) - a_{n_x}(x) < \varepsilon$. Kako su funkcije a i a_n neprekidne u tački x, to nejednakost $0 \leqslant a(y) - a_{n_x}(y) < \varepsilon$ važi i za y iz neke okoline $U(x)$ tačke x. Takvu okolinu $U(x)$ možemo izabrati za svaku

* U. Dini (1845–1918), italijanski matematičar

tačku $x \in K$ i dobijena familija $\{U(x) \mid x \in K\}$ čini pokrivač kompaktnog skupa K otvorenim skupovima $U(x)$. Može se, dakle, izdvojiti konačno mnogo tačaka $x_1, \ldots, x_k \in K$, takvih da okoline $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ same pokrivaju K. Označimo sada

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}.$$

Za $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ važiće tada $0 \leqslant a(y) - a_n(y) < \varepsilon$ za sve $y \in K$, što i znači da niz $a_n(y)$ teži funkciji $a(y)$, kad $n \to \infty$, ravnomerno po $y \in K$. ■

POSLEDICA 1.3.3

Neka je $K \subset \mathbf{R}$ kompaktan skup i neka su $a_n\colon K \to \mathbf{R}$ neprekidne i nenegativne funkcije. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konvergira na K i njegova suma je neprekidna funkcija, tada on konvergira ravnomerno na K.

Dokaz.

Zbog nenegativnosti funkcija a_n, parcijalne sume datog reda obrazuju, za svako fiksirano $x \in K$, monoton niz, pa tvrđenje sledi iz Dinijevog stava. ■

Primetimo da je kompaktnost domena bitna pretpostavka u Dinijevom stavu.

PRIMER 1.3.2

Niz neprekidnih funkcija $a_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $0 < x < 1$, konvergira na $(0, 1)$ neprekidnoj funkciji $a(x) = 0$, pri čemu je, za sve $x \in (0, 1)$, $(a_n(x))_n$ monoton niz. Međutim, ta konvergencija nije ravnomerna (proveriti!). ▲

Integracija i granični prelaz

TEOREMA 1.3.3

Neka su $f_t\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabilne funkcije za svako $t \in T \subset \mathbf{R}$ i neka je $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa T. Ako $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ na $[a, b]$, tada je i f integrabilna funkcija na $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to t_0} \int_a^b f_t(x)\,dx. \tag{1}$$

Dokaz.

U dokazu integrabilnosti funkcije f koristićemo kriterijum integrabilnosti sadržan u teoremi 8.1.1 iz M.A.I.

Najpre, za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo okolinu U tačke t_0, takvu da je za sve $t \in U \cap T$ i sve $x \in [a, b]$ ispunjeno

$$f_t(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_t(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{2}$$

Za proizvoljno takvo t odredimo $\delta > 0$, takvo da za Darbuove sume funkcije f_t koje odgovaraju proizvoljnoj podeli P segmenta $[a, b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$, važi

$$S(f_t, P) - s(f_t, P) < \varepsilon. \tag{3}$$

Iz (2) sledi da je

$$s(f,P) \geqslant s(f_t,P) - \varepsilon \quad \text{i} \quad S(f,P) \leqslant S(f_t,P) + \varepsilon. \tag{4}$$

Najzad, iz (3) i (4) dobijamo da je $S(f,P) - s(f,P) < 3\varepsilon$ za sve podele P za koje je $\lambda(P) < \delta$, što prema pomenutoj teoremi znači da $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Jednakost (1) sledi iz činjenice da je za svako $t \in U \cap T$, gde je U okolina tačke t_0, izabrana tako da važi (2), ispunjeno

$$\left|\int_a^b f_t(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_t(x) - f(x))\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_t(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Posledica 1.3.4

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *funkcija integrabilnih na segmentu* $[a,b]$ *ravnomerno konvergira, onda je njegov zbir integrabilna funkcija i važi*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\,dx. \quad \blacksquare \tag{5}$$

Ako važi formula (5), još se kaže da se funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ može integrisati član-po-član.

Primeri 1.3.3

1° U primeru 1.1.2° videli smo da za niz $a_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ne važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right) dx.$$

Zato (ponovo) zaključujemo da taj niz na $[0,1]$ ne konvergira ravnomerno.

2° Red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (apsolutno) konvergira za $0 \leqslant x < 1$, ali divergira za $x = 1$. Dakle, on ne konvergira ravnomerno na $[0,1]$. Ipak, njegov zbir $1/(1+x)$ je integrabilna funkcija na $[0,1]$ i važi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,dx. \quad \blacktriangle$$

Diferenciranje i granični prelaz

Za razliku od neprekidnosti i integrabilnosti, za diferencijabilnost granične funkcije familije diferencijabilnih funkcija nije dovoljno, u opštem slučaju, pretpostaviti da ta familija ravnomerno konvergira (v. zadatak 7). Dovoljni uslovi koji obezbeđuju tu diferencijabilnost i daju mogućnost nalaženja izvoda granične funkcije dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.3.4

Neka su $f_t\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *diferencijabilne funkcije za* $t \in T \subset \mathbf{R}$ *i neka je* $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* T. *Ako*

1° *familija* $\{ f_t \mid t \in T \}$ *konvergira za neko* $x_0 \in [a,b]$ *kad* $t \to t_0$;

2° *familija izvodnih funkcija* $\{ f_t' \mid t \in T \}$ *konvergira ravnomerno na* $[a,b]$ *kad* $t \to t_0$,

onda familija $\{ f_t \mid t \in T \}$ *takođe ravnomerno konvergira na* $[a,b]$ *nekoj funkciji* f *koja je diferencijabilna i važi* $f'(x) = \lim_{t\to t_0} f_t'(x)$.

Dokaz.

Dokažimo najpre da familija $\{ f_t \mid t \in T \}$ ravnomerno konvergira na $[a,b]$. Za dato $\varepsilon > 0$, na osnovu 1°, možemo naći okolinu U tačke t_0 tako da za sve $t_1, t_2 \in U \cap T$ važi

$$|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Za proizvoljne t_1, $t_2 \in U \cap T$ primenimo teoremu o srednjoj vrednosti na funkciju $f_{t_1} - f_{t_2}$ na intervalu $[x_0, x]$ za proizvoljno $x \in [a,b]$. Dobijamo:

$$\big(f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\big) - \big(f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\big) = (x - x_0)\big(f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c)\big), \tag{7}$$

za neko $c \in (x_0, x)$. Smanjujući, ako je potrebno, okolinu U možemo postići da za sve t_1, $t_2 \in U \cap T$ i za sve $c \in [a,b]$ (zahvaljujući 2°) važi

$$|f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{8}$$

Iz (7) onda dobijamo

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

No, kako je

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0)| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)|,$$

iz (6) i (9) sledi da za svako $x \in [a,b]$ i sve t_1, $t_2 \in U \cap T$ važi $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$, što i znači da familija $\{ f_t \mid t \in T \}$ ravnomerno na $[a,b]$ konvergira, kad $t \to t_0$, nekoj funkciji $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$.

Neka je sada x proizvoljna tačka segmenta $[a,b]$. Posmatrajmo funkciju

$$\varphi_t(h) = \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h},$$

definisanu za one $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ za koje $x + h \in [a,b]$. S jedne strane, jasno je da je $\lim_{h\to 0} \varphi_t(h) = f_t'(x)$. Dokažimo da, s druge strane, familija $\{ \varphi_t \mid t \in T \}$, kad $t \to t_0$, ravnomerno konvergira po h na ukazanom skupu. Zaista, primenjujući na funkciju $f_{t_1} - f_{t_2}$ Lagranžovu teoremu na segmentu $[x, x+h]$ dobijamo

$$\varphi_{t_1}(h) - \varphi_{t_2}(h) = \frac{f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x)}{h} - \frac{f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x)}{h} = f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c),$$

za neko $c \in (x, x+h)$, pa iz (8) sledi

$$|\varphi_{t_1}(h) - \varphi_{t_2}(h)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

za proizvoljno, unapred zadato, $\varepsilon > 0$ i sve t_1, t_2 iz pogodno odabrane okoline $U \cap T$ tačke t_0. Primenjujući sada na familiju funkcija $\varphi_t(h)$ teoremu 1 zaključujemo da njena granična funkcija

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ima limes kad $h \to 0$ i da je on jednak $\lim\limits_{t \to t_0} \lim\limits_{h \to 0} \varphi_t(h) = \lim\limits_{t \to t_0} f_t'(x)$. Dakle, funkcija f je diferencijabilna u tački x i važi

$$f'(x) = \lim_{t \to t_0} f_t'(x),$$

što je i trebalo dokazati. ■

Kao i u nekoliko prethodnih situacija, prepustićemo čitaocu da formuliše specijalan slučaj ove teoreme kada se umesto o proizvoljnoj familiji govori o diferenciranju granične funkcije funkcionalnog niza. Ovde dajemo formulaciju odgovarajućeg stava za funkcionalne redove.

Posledica 1.3.5

Ako je svaka od funkcija $a_n\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ *diferencijabilna i ako red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *ravnomerno konvergira na* $[a,b]$, *a sam red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konvergira bar u jednoj tački* $x_0 \in [a,b]$, *tada taj red ravnomerno konvergira na* $[a,b]$, *njegova suma je diferencijabilna funkcija i važi* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *za* $x \in [a,b]$. ■

Ako važi zaključak ove posledice, kaže se da se red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ može diferencirati član-po-član.

Primetimo da, slično kao i kod neprekidnosti, kada se dokazuje diferencijabilnost granične funkcije neke familije funkcija na nekom intervalu $A \subset \mathbf{R}$, onda ustvari treba dokazivati njenu diferencijabilnost u svakoj tački tog intervala, pa nije neophodno da uslovi teoreme 4 budu zadovoljeni na celom intervalu A, već je dovoljno da oni važe u nekoj okolini svake fiksirane tačke.

Primer 1.3.4

Ispitajmo osobine *Rimanove zeta funkcije* date sa

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{10}$$

Jasno je da red (10) konvergira ako i samo ako je $x > 1$, pa je domen funkcije ζ interval $(1, +\infty)$. Članovi toga reda su neprekidne funkcije od $x \in (1, +\infty)$, međutim on ne konvergira ravnomerno na tom intervalu (proveriti!), pa

se o neprekidnosti funkcije ζ ne može neposredno zaključiti na osnovu teoreme 2. Međutim, ako za proizvoljnu fiksiranu tačku $x_0 > 1$ odaberemo pozitivan broj ε tako da važi $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (1, +\infty)$, onda će za $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ važiti $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_0 - \varepsilon}}$, pa, kako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0-\varepsilon}}$ konvergentan, iz Vajerštrasovog kriterijuma sledi ravnomerna konvergencija reda (10) na $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Na taj način, na osnovu posledice 2 zaključujemo da je funkcija ζ neprekidna u tački x_0, dakle (zbog proizvoljnosti x_0) i na celom intervalu $(1, +\infty)$.

Na sličan način dokazujemo i diferencijabilnost funkcije ζ na $(1, +\infty)$. Naime, za proizvoljno $x_0 > 1$ red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

ravnomerno konvergira na svakom intervalu oblika $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ako je $x_0 - \varepsilon > 1$ (dokazati!). Zato su ispunjeni uslovi posledice 5, pa dobijamo da je funkcija ζ diferencijabilna u tački x_0 (pa i na intervalu $(1, +\infty)$) i važi

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x > 1.$$

Induktivno se lako zaključuje da za svako $k \in \mathbf{N}$ važi

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}, \quad x > 1,$$

tj. funkcija $\zeta\colon (1, +\infty) \to \mathbf{R}$ je beskonačno diferencijabilna. ▲

1.4. STEPENI REDOVI. ANALITIČKE FUNKCIJE

U ovom odeljku primenićemo dosad razvijenu teoriju funkcionalnih redova na ispitivanje funkcija definisanih redovima oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

koji se nazivaju *stepenim* ili *potencijalnim redovima*. Pretpostavljaćemo da su broj x_0, koeficijenti a_n $(n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, kao i promenljiva x u izrazu (1) realni brojevi. Pomenimo da se mnogi od rezultata ovog odeljka mogu preneti i na slučaj kompleksnih stepenih redova, no to neće biti predmet našeg izučavanja.

Očigledno je da svaki red oblika (1) (apsolutno) konvergira za $x = x_0$. Može se dogoditi da to bude i jedina vrednost promenljive x za koju taj red konvergira (v. dalje primer 1.1°). Za redove kod kojih to nije slučaj važi

Lema 1.4.1

Ako red (1) *konvergira za neko* $x = \bar{x} \neq x_0$, *onda on apsolutno konvergira za svako* $x \in \mathbf{R}$ *za koje je* $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$.

Dokaz.

Iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n$ sledi da je niz $a_n(\bar{x}-x_0)^n$ ograničen, tj. da za neko $M \in \mathbf{R}$ i svako n važi $|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leqslant M$. Za $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$ je onda

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \cdot \left|\frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0}\right|^n \leqslant Mq^n,$$

gde je $q = \left|\frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0}\right| < 1$, pa red $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$, a sa njim i red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$, konvergira. ■

Iz ove leme je jasno da je za ispitivanje reda (1) važno odrediti broj

$$R = \sup\{\, |x-x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{konvergira} \,\}. \tag{2}$$

Naime, jasno je da važi

Stav 1.4.1

Stepeni red (1) *apsolutno konvergira za svako* $x \in \mathbf{R}$ *za koje je* $|x-x_0| < R$, *a divergira za svako* $x \in \mathbf{R}$ *za koje je* $|x-x_0| > R$. ■

Naravno, u specijalnom slučaju $R = 0$, kada osim $x = x_0$ nema vrednosti promenljive za koju dati red konvergira, nema tačaka x za koje je $|x-x_0| < R$; u slučaju $R = +\infty$ (koji je takođe moguć — v. dalje primer 1.2°) nema vrednosti $x \in \mathbf{R}$ za koju je $|x-x_0| > R$ — tada red (1) apsolutno konvergira za svako realno x.

Broj R dat relacijom (2) zove se *radijus konvergencije* stepenog reda (1). U slučaju $R > 0$ interval (x_0-R, x_0+R) u kome red (apsolutno) konvergira zove se *interval konvergencije* reda (1). Ako je još $R < +\infty$ postavlja se pitanje o konvergenciji reda na rubu intervala konvergencije, tj. u tačkama $x = x_0+R$ i $x = x_0-R$. Pokazaćemo primerima da se na to pitanje u opštem slučaju ne može dati nikakav određen odgovor.

Primeri 1.4.1

1° Red $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ divergira za svako $x \neq 0$, jer mu opšti član ne teži nuli. Za ovaj red je, dakle, $R = 0$.

2° Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ apsolutno konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$, što lako sledi, na primer, iz Dalamberovog kriterijuma. Dakle, ovde je $R = +\infty$. U ova dva primera se pitanje konvergencije reda na rubu intervala ne postavlja.

3° Red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira za $|x| < 1$, a divergira za $|x| \geqslant 1$. Dakle, $R = 1$, interval konvergencije je $(-1,1)$ i red divergira na njegovim krajevima.

4° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ takođe ima radijus konvergencije jednak 1, no za $x = -1$ on (uslovno) konvergira, dok za $x = 1$ divergira.

5° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ apsolutno konvergira u oba kraja $x = \pm 1$ svog intervala konvergencije. ▲

Radijus konvergencije se, u zavisnosti od koeficijenata stepenog reda, određuje pomoću sledeće *Koši-Adamarove* formule.*

Teorema 1.4.1

Za radijus konvergencije R *stepenog reda* (1) *važi*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Pri tom se podrazumeva da je $R = 0$ *za* $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, *a* $R = +\infty$ *za* $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Dokaz.

Neka je $\rho = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$. Ispitivanje jednostavnih slučajeva $\rho = 0$ i $\rho = +\infty$ prepuštamo čitaocu. Pretpostavimo da je $0 < \rho < +\infty$.

Za $x \in \mathbf{R}$, takvo da je $|x-x_0| < \frac{1}{\rho}$, odredimo $\varepsilon > 0$ tako da je $|x-x_0| < \frac{1}{\rho+\varepsilon}$. Izaberimo zatim prirodan broj n_0, takav da za $n > n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho+\varepsilon$ (takav indeks n_0 postoji na osnovu poznatih osobina gornjeg limesa — v. stav 3.2.5 iz M.A.I). Za $n > n_0$ je onda

$$\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\sqrt[n]{|a_n|} < |x-x_0|(\rho+\varepsilon) < 1,$$

pa na osnovu Košijevog korenog kriterijuma (stav 10.2.3 iz M.A.I) sledi da red (1) konvergira.

Neka je sada $x \in \mathbf{R}$ takvo da je $|x-x_0| > \frac{1}{\rho}$. Odredimo broj $\varepsilon > 0$ tako da je $|x-x_0| > \frac{1}{\rho-\varepsilon}$. Ponovo primenjujući stav 3.2.5 iz M.A.I zaključujemo da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva za koje je $\sqrt[n]{|a_n|} > \rho-\varepsilon$, pa i

$$\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > |x-x_0|(\rho-\varepsilon) > 1.$$

Na taj način, opšti član reda (1) ne teži nuli, pa taj red divergira.

Dakle, red (1) konvergira za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $|x-x_0| < 1/\rho$, a divergira za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $|x-x_0| > 1/\rho$, pa je

$$\frac{1}{\rho} = \sup\{\, |x-x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{konvergira} \,\} = R. \quad ■$$

Posledica 1.4.1

Za radijus konvergencije R *reda* (1) *važi*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \textit{odnosno} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3}$$

ako ti limesi postoje. ■

* J. Hadamard (1865–1963), francuski matematičar

PRIMER 1.4.2

Za red $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]^n x^n$ je $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}[2+(-1)^n] = 3$, pa je $R = 1/3$. Za $x \in \mathbf{R}$ za koje je $|x| = 1/3$ red divergira jer $|a_{2k}x^{2k}| = 3^{2k}\cdot\frac{1}{3^{2k}} = 1$ ne teži nuli kad $k \to \infty$. Primetimo da se radijus konvergencije ovog reda ne može odrediti pomoću formula (3). ▲

Prelazeći na ispitivanje ravnomerne konvergencije stepenih redova dokažimo najpre sledeći

STAV 1.4.2

Neka stepeni red (1) *ima radijus konvergencije* $R > 0$. *Tada za svako* r, $0 < r < R$, *taj red ravnomerno konvergira na segmentu* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Dokaz.

Kako red (1) apsolutno konvergira za $x = x_0 + r$, to njegova ravnomerna konvergencija na $[x_0 - r, x_0 + r]$ lako sledi na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma. ■

Kako je svaka tačka x_1 intervala $(x_0 - R, x_0 + R)$ sadržana u nekom segmentu oblika $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$, to iz ovog stava neposredno dobijamo da važi

POSLEDICA 1.4.2

Ako je radijus konvergencije R *stepenog reda* (1) *pozitivan, funkcija* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *je neprekidna na intervalu* $(x_0 - R, x_0 + R)$. ■

POSLEDICA 1.4.3

Ako u nekoj okolini tačke x_0 *važi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n, \tag{4}$$

onda je $a_n = b_n$ *za svako* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz.

Stavljajući u jednakost (4) $x = x_0$ dobijamo $a_0 = b_0$. Za $x \neq x_0$, skraćivanjem dobijene jednakosti, dobijamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x - x_0)^{n-1}$. Zbog dokazane neprekidnosti, međutim, ta jednakost važi i za $x = x_0$, tj. važi $a_1 = b_1$. Dalje se analogno redom dobija $a_n = b_n$, $n = 2, 3, \ldots$. ■

Primetimo da u opštem slučaju red (1) ne konvergira ravnomerno na celom svom intervalu konvergencije $(x_0 - R, x_0 + R)$. Zaista, u primerima 2.1.1° i 2.2 dokazali smo da redovi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, odnosno $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, ne konvergiraju ravnomerno na $(-1, 1)$. Međutim, ako red (1) konvergira u nekom od krajeva intervala konvergencije, makar i neapsolutno, tada se interval ravnomerne konvergencije može „proširiti" do toga kraja. Naime, važi sledeća *Abelova teorema.*

TEOREMA 1.4.2

Ako red (1) *ima radijus konvergencije* $R > 0$ *i ako on konvergira za* $x = x_0 + R$, *onda on konvergira ravnomerno na segmentu* $[x_0, x_0 + R]$ *i njegova suma je neprekidna (sleva) u tački* $x = x_0 + R$, *tj. važi*

$$\lim_{x \to x_0 + R - 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Dokaz.

Opšti član reda (1) napišimo u obliku

$$a_n(x - x_0)^n = a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n.$$

Kako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, po pretpostavci, konvergira, a niz $\left(\left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n\right)$ je za $x \in [x_0, x_0 + R]$ ograničen i opadajući (po n), to red (1) ravnomerno konvergira na $[x_0, x_0 + R]$ na osnovu Abelovog kriterijuma (stav 2.2). ■

Navedimo jednu primenu ove teoreme na množenje numeričkih redova. Podsetimo se da ako redovi realnih brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ apsolutno konvergiraju, onda i njihov proizvod $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gde je $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, takođe konvergira i da mu je suma jednaka proizvodu suma datih redova. Ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ samo uslovno konvergiraju, onda red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ne mora da konvergira. Međutim, važi

STAV 1.4.3

Ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *gde je* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *konvergiraju, tada važi*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{5}$$

Dokaz.

Iz konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sledi da red $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergira za $|x| < 1$ i, na osnovu teoreme 2, važi $\lim_{x \to 1-0} A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Slično važi za red $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Za red $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, zbog apsolutne konvergencije redova $A(x)$ i $B(x)$ za $|x| < 1$, važi $C(x) = A(x)B(x)$. Ponovo primenjujući teoremu 2, prelaskom na limes kad $x \to 1 - 0$, iz te jednakosti dobijamo relaciju (5). ■

Analitičke funkcije

U vezi sa diferenciranjem i integracijom funkcije definisane stepenim redom važi sledeće jednostavno tvrđenje.

Stav 1.4.4

Ako red (1) *ima pozitivan radijus konvergencije R, onda se on unutar svog intervala konvergencije može diferencirati i integrisati član-po-član. Dobijeni redovi imaju isti radijus konvergencije kao i polazni.*

Dokaz.

Formalno diferenciranje reda (1) daje red $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$. Kako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, jasno je da taj red ima isti radijus konvergencije kao i red (1). Na osnovu stava 2 sledi da je prethodno diferenciranje član-po-član opravdano.

Slično se dokazuje da za svako $x \in \mathbf{R}$ za koje je $|x-x_0| < R$ važi

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Pomenimo da, mada se pri diferenciranju i integraciji radijus konvergencije stepenog reda ne menja, na rubu intervala konvergencije njegovo ponašanje se može promeniti (v. dalje primer 4.4°).

Posledica 1.4.4

Unutar svog intervala konvergencije stepeni red (1) *definiše beskonačno diferencijabilnu funkciju* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, *takvu da je* $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ *za* $n = 0, 1, 2, \ldots$. $\blacksquare$

Ako je neka realna funkcija f definisana i beskonačno diferencijabilna u okolini tačke x_0, red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ zvaćemo *Tejlorovim redom* funkcije f. Na osnovu posledice 4, ako se neka funkcija f u okolini tačke x_0 može predstaviti kao zbir stepenog reda oblika (1), onda je taj red Tejlorov red funkcije f. Međutim, ne mora svaka beskonačno diferencijabilna funkcija biti jednaka zbiru svog Tejlorovog reda.

Primer 1.4.3

Na osnovu zadatka 6.10 iz M.A.I, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ako } x \neq 0, \\ 0, & \text{ako } x = 0 \end{cases}$$

beskonačno je diferencijabilna u okolini tačke $x = 0$ i važi $f^{(n)}(0) = 0$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Dakle je Tejlorov red funkcije f u okolini tačke 0 identički jednak nuli, pa njegov zbir nije jednak funkciji f. ▲

Za funkciju f koja je jednaka zbiru svog Tejlorovog reda u okolini tačke x_0, ili, kako se još kaže, koja se može *razviti* u stepeni red u okolini tačke x_0 kaže se da je *analitička* u okolini tačke x_0. Jasno je da će funkcija f biti analitička ako, pored toga što je ona beskonačno diferencijabilna, važi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, gde je $R_n(x)$ ostatak u Tejlorovoj formuli $f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x)$ (v. odeljak 6.7 u M.A.I). Dokazivanje analitičnosti nekih elementarnih funkcija olakšaće nam sledeća jednostavna lema.

Lema 1.4.2

Ako je realna funkcija f beskonačno diferencijabilna na segmentu $[x_0-h, x_0+h]$ i postoji konstanta M, takva da za svako $n \in \mathbf{N}$ i svako $x \in [x_0-h, x_0+h]$ važi $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, tada je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za sve $x \in [x_0-h, x_0+h]$.

Dokaz.

Koristeći Lagranžov oblik ostatka dobijamo da je za sve $x \in [x_0-h, x_0+h]$ i neko θ, $0 < \theta < 1$ ispunjeno

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)) \right| \leqslant M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Primeri 1.4.4

1° Za funkciju $f(x) = e^x$ je $f^{(n)}(x) = e^x$ i $f^{(n)}(0) = 1$ za $n \in \mathbf{N}$. Tejlorov red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ funkcije f konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$ i suma mu je jednaka e^x, jer za svako $h \in \mathbf{R}$ važi $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^{|h|}$ za $x \in [-h, h]$.

2° Zbog $|\sin^{(n)} x| \leqslant 1$, $|\cos^{(n)} x| \leqslant 1$ za $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ dobijamo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{i} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{za } x \in \mathbf{R}.$$

3° Tejlorov red funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) glasi $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ i naziva se *binomnim redom* (za $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ on ima samo konačan broj sabiraka). Primenom Koši-Adamarove formule lako se izvodi da je njegov radijus konvergencije (za $\alpha \notin \mathbf{N} \cup \{0\}$) jednak 1. Da bismo dokazali da za $|x| < 1$ važi

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{6}$$

iskoristićemo Košijev oblik ostatka u odgovarajućoj Maklorenovoj formuli. Naime, za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n} (\alpha - n)(1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Napišimo ostatak $R_n(x)$ u obliku

$$R_n(x) = \left[\binom{\alpha-1}{n}x^n\right]\left[\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\right]\left[\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right].$$

Izraz u prvoj uglastoj zagradi je opšti član binomnog reda funkcije $(1+x)^{\alpha-1}$ koji, zbog $|x|<1$, konvergira, pa taj izraz teži nuli. U drugoj zagradi je veličina koja je za date x i α ograničena između

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \quad \text{i} \quad |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

dakle granicama koje ne zavise od n. Najzad, zbog $x > -1$ i $0 < \theta < 1$ je $1+\theta x > 1-\theta$ i $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, pa je u poslednjoj uglastoj zagradi izraz koji je manji od 1. Dakle, važi $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, a samim tim i formula (6).

Čitaocu prepuštamo da odredi za koje vrednosti eksponenta α binomni red konvergira za $x = 1$, odnosno $x = -1$ (v. zadatak 10). Primetimo da, uvek kada je to slučaj, na osnovu Abelove teoreme 2, sledi da razvoj (6) važi i u odgovarajućem kraju intervala $(-1, 1)$.

4° Ako red

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

integrišemo član-po-član na intervalu $[0, x]$ za $|x| < 1$ (što je dozvoljeno na osnovu stava 4), dobijamo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Kako dobijeni red konvergira i za $x = 1$, a $\ln(1+x)$ je neprekidna funkcija u toj tački, to na osnovu teoreme 2 zaključujemo da navedeni razvoj logaritamske funkcije važi za sve $x \in (-1, 1]$. (Primetimo da polazni stepeni red ne konvergira u tački $x = 1$.) ▲

1.5. PROSTOR $C[a, b]$. APROKSIMACIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA POLINOMIMA

Podsetimo se da pod metričkim prostorom $C[a, b]$, gde je $[a, b]$ segment realne prave, podrazumevamo skup svih neprekidnih funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, snabdeven metrikom

$$d(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)| \tag{1}$$

(primer 9.1.1.5° iz M.A.I). Posmatrajmo niz (f_n) funkcija iz $C[a, b]$. Taj niz konvergira (u smislu uvedene metrike d) funkciji $f \in C[a, b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, tako da za sve $n > n_0$ važi

$$d(f_n, f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Drugim rečima, važi: niz (f_n) konvergira ka f u $C[a, b]$ ako i samo ako $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na $[a, b]$. Zbog ove činjenice često se metrika (1) prostora $C[a, b]$ zove *ravnomerna (uniformna) metrika.*

STAV 1.5.1

Prostor $C[a, b]$ je kompletan, tj. u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Dokaz.

Neka je (f_n) Košijev niz funkcija $f_n \in C[a, b]$, tj. neka za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da za $m, n > n_0$ važi $d(f_m, f_n) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, odnosno $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in [a, b]$. Na osnovu teoreme 1.1 sledi da funkcionalni niz $(f_n(x))$ ravnomerno konvergira nekoj funkciji $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$. Prema teoremi 3.2 funkcija f je neprekidna na $[a, b]$, tj. $f \in C[a, b]$, čime je tvrđenje stava dokazano. ■

Podsetimo se (v. zadatke 9.6 i 9.7 iz M.A.I) da za metrički prostor X kažemo da je separabilan ako u njemu postoji prebrojiv skup A koji je svuda gust, tj. koji ima osobinu da za svaku tačku $x \in X$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji tačka $a \in A$, takva da je $d(x, a) < \varepsilon$. Na drugi način iskazano, skup A je svuda gust u X ako mu se adherencija $\overline{A}$ poklapa sa X. Za elemente svuda gustog skupa možemo reći da na određeni način aproksimiraju elemente samog prostora X. Zato je od interesa naći pogodne svuda guste skupove u pojedinim metričkim prostorima. Dokazaćemo da je u prostoru $C[a, b]$ svuda gust skup svih polinoma, tj. da se svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ može ravnomerno aproksimirati polinomima. Iz te činjenice slediće i separabilnost prostora $C[a, b]$.

TEOREMA 1.5.1 (Vajerštras)

Za svako $f \in C[a, b]$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji polinom p sa realnim koeficijentima, takav da je $d(f, p) < \varepsilon$, tj. $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in [a, b]$.

Dokaz.

Ne predstavlja ograničenje opštosti ako pretpostavimo da je $[a, b] = [-1, 1]$. Kao neprekidna na $[-1, 1]$, funkcija f je ravnomerno neprekidna na tom segmentu, pa za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve x', $x'' \in [-1, 1]$ za koje je $|x' - x''| < \delta$ važi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$. Izaberimo podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[-1, 1]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$. Definišimo funkciju $l\colon [-1, 1] \to \mathbf{R}$ koja se u tačkama podele P poklapa sa f: $l(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, a na segmentima $[x_{i-1}, x_i]$ je linearna, tj. za $x \in [x_{i-1}, x_i]$ važi

$$l(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Tada je za $i = 1, \ldots, n$ i $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

(2)

$$\begin{aligned} |f(x) - l(x)| &= \left|\frac{[f(x) - f(x_{i-1})][x_i - x_{i-1}] - [f(x_i) - f(x_{i-1})][x - x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}\right| \\ &= \left|\frac{[f(x) - f(x_i)][x - x_{i-1}] + [f(x) - f(x_{i-1})][x_i - x]}{x_i - x_{i-1}}\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(x - x_{i-1}) + (x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

jer je $|x - x_i| < \delta$ i $|x - x_{i-1}| < \delta$.

Lako se proverava da funkcija l može da se izrazi u obliku

$$l(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i|x - x_i|$$

sa pogodno odabranim koeficijentima a_i. Zato je još dovoljno dokazati da se svaka od funkcija $|x-x_i|$ na $[-1,1]$ može ravnomerno aproksimirati polinomima, a to ćemo dokazati tako što ćemo pokazati da se funkcija $|x|$ može ravnomerno aproksimirati polinomima na skupu $[-2,2]$ koji sadrži sve segmente oblika $[-1-x_i, 1-x_i]$. Ovo poslednje, međutim, lako sledi na osnovu primera 4.4.3°. Naime, važi

$$|x| = 2\left|\frac{x}{2}\right| = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-1\right)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^n$$

i taj red ravnomerno konvergira na segmentu $[-2,2]$, jer red $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}$ (apsolutno) konvergira (proveriti!).

Označimo sa p_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ polinom koji ravnomerno aproksimira funkciju $a_i|x - x_i|$, tj. za koji važi

$$\left|\, a_i|x - x_i| - p_i(x)\,\right| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)},$$

i sa p polinom $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i(x)$. Tada je

$$|l(x) - p(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n}\left(a_i|x - x_i| - p_i(x)\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n}\left|\, a_i|x - x_i| - p_i(x)\,\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uzimajući u obzir relaciju (2) dobijamo da je ispunjeno $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, za sve $x \in [-1,1]$, što je i trebalo dokazati. ■

Posledica 1.5.1

Prostor $C[a,b]$ je separabilan.

Dokaz.

Pretpostavimo ponovo da je $[a,b] = [-1,1]$. Neka je f proizvoljna funkcija iz $C[-1,1]$ i ε pozitivan broj. Na osnovu dokazane teoreme postoji polinom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k$ sa osobinom da je $d(f,p) < \frac{\varepsilon}{2}$. Izaberimo racionalne brojeve q_k tako da je $|p_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$ za $k = 0, 1, \dots, n$ i označimo sa q polinom $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} q_k x^k$. Tada je

$$d(p,q) = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\sum_{k=0}^{n}(p_k - q_k)x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}(n+1) = \frac{\varepsilon}{2},$$

pa je $d(f,q) \leqslant d(f,p) + d(p,q) < \varepsilon$. To znači da je skup polinoma sa racionalnim koeficijentima svuda gust u prostoru $C[a,b]$. Lako se proverava da je taj skup polinoma prebrojiv, pa je prostor $C[a,b]$ separabilan. ■

Kao i u slučaju drugih metričkih prostora, od velikog je značaja da se nađe neophodan i dovoljan uslov koji obezbeđuje da je neki podskup prostora $C[a,b]$ kompaktan. Naime, prema stavu 9.5.4 iz M.A.I (v. i primedbu posle tog stava) takav podskup ima osobinu da svaki beskonačan niz u njemu ima podniz koji konvergira elementu tog skupa. Na osnovu stava 9.5.2 i posledice 9.5.1 iz M.A.I (v. i napomenu posle te posledice) znamo da su neophodni uslovi kompaktnosti ograničenost i zatvorenost. Ti uslovi, međutim, nisu dovoljni. Na primer, jedinična sfera $S(0,1)$ prostora $C[a,b]$ (dakle, skup funkcija $f \in C[a,b]$ koje imaju osobinu da je $d(f,0) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| = 1$) nije kompaktan skup, mada je ograničen i zatvoren (proveriti!). Navešćemo bez dokaza teoremu koja daje neophodne i dovoljne uslove kompaktnosti podskupa prostora $C[a,b]$ (za dokaz videti npr. [1]).

Teorema 1.5.2 (Arcela-Askoli*)

Skup $K \subset C[a,b]$ je kompaktan ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1° *K je zatvoren skup;*

2° *skup K je ograničen, tj. postoji broj M, takav da je za sve $f \in K$ i svako $x \in [a,b]$ ispunjeno $|f(x)| \leqslant M$ (kaže se još da su funkcije $f \in K$ uniformno ograničene);*

3° *funkcije $f \in K$ su podjednako neprekidne, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za sve $f \in K$ važi:*

$$x', x'' \in [a,b],\ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad ■$$

ZADACI

1. Ako su $\{f_t \mid t \in T\}$ i $\{g_t \mid t \in T\}$ ravnomerno konvergentne familije funkcija na skupu A, dokazati da je i $\{f_t + g_t \mid t \in T\}$ ravnomerno konvergentna familija na A. Ako su još funkcije f_t i g_t $(t \in T)$ ravnomerno ograničene na A, dokazati da je $\{f_t g_t \mid t \in T\}$ ravnomerno konvergentna familija na A.

2. Dokazati da familija funkcija $f_t(x) = e^{-(x/t)^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, kad $t \to 0$, konvergira neravnomerno na $\mathbf{R}$.

3. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ ravnomerno konvergira na svakom konačnom intervalu, ali nije apsolutno konvergentan ni za jedno $x \in \mathbf{R}$.

4. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergira apsolutno i ravnomerno na $\mathbf{R}$, ali da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ne konvergira ravnomerno.

* C. Arzelà (1847–1912), G. Ascoli (1843–1896), italijanski matematičari

5. Neka je

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi}{x}, & \text{ako } \dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{za ostale } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dokazati:

1° niz $(f_n(x))$ konvergira neravnomerno neprekidnoj funkciji kad $n \to \infty$;

2° red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira za sve $x \in [0,1]$ ali ne konvergira ravnomerno na $[0,1]$.

6. Neka je za $n \in \mathbf{N}$ i $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\,\pi x)$. Dokazati:

1° za svako n je f_n integrabilna funkcija na svakom konačnom intervalu;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ je Dirihleova funkcija $\chi(x)$, pa nije integrabilna ni na jednom konačnom intervalu.

7. Neka je $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ za $n \in \mathbf{N}$ i $x \in \mathbf{R}$. Dokazati:

1° $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$ na $\mathbf{R}$;

2° funkcije f_n su diferencijabilne u 0 i važi $f_n'(0) = \sqrt{n}$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0) = 0$.

8. Neka je (c_n) niz realnih brojeva. Dokazati da ako *Dirihleov red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^x}$ konvergira za neko $x_0 \in \mathbf{R}$, tada on konvergira ravnomerno za $x \geqslant x_0$, pri čemu za $x > x_0 + 1$ konvergira apsolutno. Dokazati da je funkcija koju taj red definiše beskonačno diferencijabilna u svojoj oblasti definisanosti.

9. Koristeći Dinijev kriterijum (stav 3.1) dokazati da niz funkcija $f_n(x) = n(1 - \sqrt[n]{x})$, kad $n \to \infty$, konvergira funkciji $f(x) = \ln(1/x)$, ravnomerno na svakom segmentu $[a,b] \subset (0,1)$. Dokazati da $f_n(x)$ ne konvergira $f(x)$ ravnomerno na $(0,1]$.

10. Dokazati da binomni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $(\alpha \notin \mathbf{N} \cup \{0\})$ u krajevima svog intervala konvergencije ima sledeće ponašanje:

1° u tački $x = 1$: (a) apsolutno konvergira za $\alpha > 0$; (b) uslovno konvergira za $-1 < \alpha < 0$; (c) divergira za $\alpha \leqslant -1$;

2° u tački $x = -1$: (a) apsolutno konvergira za $\alpha > 0$; (b) divergira za $\alpha < 0$.

11. Ispitati konvergenciju (običnu, apsolutnu i ravnomernu) *hipergeometrijskog reda*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, x^n$$

za $\alpha, \beta, \gamma \neq -k$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbf{R}$. Dokazati da za sve navedene vrednosti parametara α, β, γ i za $|x| < 1$ on definiše funkciju $f(x)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

12. Dokazati da *Beselova* funkcija* $J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+n}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, zadovoljava diferencijalnu jednačinu $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

13. Dokazati da je:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1,1];$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\, x^{2n+1}, \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{arsh} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leqslant 1.$$

14. Dokazati da je

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

15. Za eliptičke integrale prve i druge vrste:

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \quad 0 < k < 1,$$

dokazati da važi:

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2}\, k^{2n}\right],$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1}\right].$$

* F. W. Bessel (1784–1846), nemački astronom

16. Dokazati da je $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

17. Neka je φ_0 periodična funkcija s periodom 1, koja je na $[0,1]$ data pomoću

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x, & \text{ako } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1-x, & \text{ako } 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

i neka je za $n \in \mathbf{N}$ i $x \in \mathbf{R}$: $\varphi_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x)$. Dokazati:

1° red $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ konvergira ravnomerno na $\mathbf{R}$ i definiše neprekidnu funkciju $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2° funkcija f nije diferencijabilna ni u jednoj tački $x_0 \in \mathbf{R}$.

[Prvi primer neprekidne funkcije koja nigde nije diferencijabilna dao je Vajerštras; ovaj, nešto jednostavniji, primer pripada Van der Vardenu*.]

18. Dokazati da za $|x| < \pi/2$ važi

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

pri čemu se koeficijenti T_n određuju iz sistema rekurentnih relacija

$$T_n - \binom{2n-1}{2} T_{n-1} + \binom{2n-1}{4} T_{n-2} - \cdots = (-1)^{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Na primer, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$, $T_4 = 272$, $T_5 = 7936$, tako da je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots.$$

19. Dokazati da se funkcija $f(x) = x \operatorname{cth} x = \frac{2x}{e^{2x}-1} + x$, za $|x| < \pi$, može razviti u stepeni red

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n},$$

gde su B_n *Bernulijevi brojevi* koji se definišu na sledeći način: $B_n = (-1)^{n-1}\beta_{2n}$, gde je niz (β_n) realnih brojeva definisan sistemom rekurentnih relacija

$$2\beta_1 + 1 = 0, \quad 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 = 0, \quad 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 = 0, \quad \ldots,$$

koji se (formalno) može zapisati u obliku $(\beta+1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gde posle razvijanja prethodnog izraza po binomnom obrascu treba svaki stepen oblika β^k zameniti sa β_k. Na primer, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, $B_4 = 1/30$, $B_5 = 5/66$, $B_6 = 691/2730$, ...

20. Dokazati da familija funkcija $\{f_t(x) \mid t \in T\}$ ravnomerno po $x \in A$ konvergira kad $t \to t_0$ (gde je $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa $T \subset \mathbf{R}$) ako i samo ako za svaki niz tačaka $t_n \in T$ za koji $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$, funkcionalni niz $(f_{t_n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ ravnomerno na A konvergira kad $n \to \infty$.

* B. L. van der Waerden (1903–1996), holandski matematičar

2. DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

U ovoj glavi nastavićemo proučavanje, započeto u devetoj glavi M.A.I, funkcija više (realnih) promenljivih. Razmatraćemo, dakle, funkcije definisane na nekom podskupu m-dimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^m$, sa vrednostima u $\mathbf{R}$ (realne funkcije više promenljivih), kao i u $\mathbf{R}^n$ (vektorske funkcije više promenljivih). Ako je $A \subset \mathbf{R}^m$ domen takve funkcije f, njena vrednost u nekoj tački $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A$ zapisuje se kao $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$. U slučaju da je kodomen višedimenzioni prostor $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, ta vrednost je n-torka $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, pa su definisane realne funkcije $y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_m)$ $(j = 1, \ldots, n)$ koje nazivamo koordinatnim funkcijama funkcije f.

Pojmovi kao što su limes i neprekidnost ovakvih funkcija opisani su u M.A.I. Ovde ćemo govoriti uglavnom o funkcijama koje su diferencijabilne. Za takve funkcije se obično pretpostavlja da svaka tačka njihovog domena A ima osobinu da pripada tom skupu zajedno sa nekom svojom okolinom — drugim rečima, pretpostavlja se da je skup A otvoren. Za neka razmatranja biće neophodno i da se pretpostavi da je skup A koneksan (povezan). Za takav (otvoren i povezan) skup A kazaćemo da je *oblast* u prostoru $\mathbf{R}^m$.

2.1. PARCIJALNI IZVODI I DIFERENCIJABILNOST REALNIH FUNKCIJA

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f: A \to \mathbf{R}$ realna funkcija m realnih promenljivih i $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ fiksirana tačka. Posmatrajmo element $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$ prostora $\mathbf{R}^m$ kod kojeg su sve koordinate jednake nuli osim i-te, sa osobinom da je $\|h\| = |h_i|$ dovoljno malo da $a + h \in A$. Formirajmo izraz

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m).$$

Njega ćemo nazivati *parcijalnim priraštajem po i-toj promenljivoj* funkcije f u tački a.

Definicija 2.1.1

Ako postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)}{h_i},$$

nazivaćemo je *parcijalnim izvodom po i-toj promenljivoj* funkcije f u tački a i označavati sa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ili $f'_{x_i}(a)$.

Iz ove definicije neposredno sledi da je parcijalni izvod po i-toj promenljivoj funkcije više promenljivih ustvari običan izvod te funkcije, shvaćene kao funkcije jedne (i-te) promenljive, pri čemu ostale imaju fiksirane vrednosti $x_j = a_j$ $(j \neq i)$. Zato za njegovo praktično nalaženje mogu da se koriste uobičajena pravila za nalaženje izvoda funkcija jedne promenljive.

Primer 2.1.1

Za $y \neq 0$ neka je $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}. \quad \blacktriangle$$

Definicija parcijalnog izvoda funkcije f ne uzima u obzir vrednosti te funkcije u svim tačkama neke okoline tačke a, već samo one koje ta funkcija uzima u tačkama koje pripadaju pravoj paralelnoj i-toj koordinatnoj osi, a koja prolazi kroz a. Zato i nije neočekivana činjenica koju demonstrira naredni primer, da neka funkcija u datoj tački može imati parcijalne izvode po svakoj od promenljivih, a da pri tom ne bude neprekidna u toj tački.

Primer 2.1.2

Posmatrajmo funkciju $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, datu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{za } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

koja, prema primeru 9.4.1.3° iz M.A.I, nije neprekidna u tački $(0,0)$. Međutim, ona ima parcijalne izvode

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0. \quad \blacktriangle$$

Jasno je, zato, da, za razliku od funkcija jedne promenljive, određenu „pravilnost" funkcijama više promenljivih ne može garantovati samo postojanje (parcijalnih) izvoda, već se mora posmatrati neko svojstvo koje uzima u obzir ponašanje te

funkcije u čitavoj okolini posmatrane tačke. Da bismo takvo svojstvo uveli, setimo se da smo za realnu funkciju jedne promenljive f kazali da je diferencijabilna u nekoj tački a ako se njen priraštaj $\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a)$ mogao predstaviti u obliku

$$\Delta f(a,h) = Lh + \alpha(h)h,$$

gde je L konstanta, a funkcija $\alpha(h)$ je beskonačno mala kad $h \to 0$. Drugim rečima, priraštaj te funkcije, posmatran kao funkcija priraštaja h argumenta, ima glavni deo koji je linearna funkcija od h,

$$\Delta f(a,h) = df(a)(h) + o(h) \quad (h \to 0),$$

gde je $df(a)(h) = Lh$ vrednost diferencijala $df(a)$ te funkcije (u tački a), računatog za vrednost h priraštaja argumenta. Prenoseći ovu definiciju na slučaj funkcije više promenljivih dolazimo do sledeće definicije.

Definicija 2.1.2

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\colon A \to \mathbf{R}$ i $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ fiksirana tačka. Za $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ za koje je $\|h\|$ dovoljno malo, tako da $a + h \in A$, označimo sa

$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m)$$

priraštaj funkcije f u tački a, generisan priraštajem h argumenta. Ako se taj priraštaj može napisati u obliku

$$\Delta f(a,h) = L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m + o(h) \quad (h \to 0), \tag{1}$$

gde su $L_1, \ldots, L_m$ konstante, a sa $o(h)$ je označena realna funkcija promenljive h koja ima osobinu da je $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$, kažemo da je funkcija f *diferencijabilna* u tački a, a linearnu funkciju $h \mapsto L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m$ zovemo *diferencijalom* funkcije f u tački a i pišemo

$$df(a)(h) = L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m. \tag{2}$$

Dakle, kao i kod funkcija jedne promenljive, diferencijabilne su one funkcije kod kojih priraštaj, shvaćen kao funkcija priraštaja h argumenta, ima „glavni" deo koji je linearna funkcija od h,

$$\Delta f(a,h) = df(a)(h) + o(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

Lako se izvode sledeće osobine diferencijabilne funkcije.

Stav 2.1.1

Neka je $f\colon A \to \mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija u tački* $a \in A$. *Tada:*

1° *funkcija* f *je neprekidna u tački* a;

2° *postoje parcijalni izvodi* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $(i = 1, \dots, m)$, *a diferencijal* $df(a)$ *ima oblik*

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)h_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_m).$$

Dokaz.

1° Neposredno iz definicije diferencijabilnosti sledi da je $\lim\limits_{h\to 0} \Delta f(a,h) = 0$, tj. $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, pa je funkcija f neprekidna u tački a.

2° Stavljajući $h_j = 0$ za $j \neq i$ u relaciju (1), dobijamo

$$f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m) = L_i h_i + o(h) \quad (h \to 0),$$

odakle je

$$L_i = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad \blacksquare$$

Primetimo da iz dokazanog stava sledi da je prikaz diferencijala $df(a)$ diferencijabilne funkcije f u tački a u obliku (2) jednoznačno određen. Inače, nijedan od uslova 1°, 2° ovog stava (neprekidnost, postojanje parcijalnih izvoda), čak ni oba zajedno, ne garantuju diferencijabilnost funkcije.

Primer 2.1.3

Funkcija $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, data sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{za } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

neprekidna je u tački $(0,0)$ (što se lako proverava) i ima u toj tački parcijalne izvode $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ona, međutim, nije diferencijabilna u toj tački. Naime, ako bi ona to bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} = 0 \cdot h + 0 \cdot k + o(h,k), \quad (h,k) \to (0,0),$$

odakle bi sledilo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 0,$$

što nije tačno, jer je za $h = k > 0$:

$$\frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\to 0, \quad (h,k) \to (0,0). \quad \blacktriangle$$

Navedimo sada jedan dovoljan uslov diferencijabilnosti.

Stav 2.1.2

Neka u nekoj okolini U *tačke* $a = (a_1, \dots, a_m) \in A \subset \mathbf{R}^m$ *funkcija* $f\colon A \to \mathbf{R}$ *ima sve parcijalne izvode* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, m)$ *i neka su oni neprekidni u tački* a. *Tada je* f *diferencijabilna u tački* a.

Dokaz.

Možemo pretpostaviti da je U kugla $K(a,\varepsilon)$. Neka je $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ takav da je $\|h\| < \varepsilon$. Tada priraštaj $f(a+h) - f(a)$ možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m) \\ &= f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_m + h_m) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_m + h_m) \\ &\quad + \cdots + f(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m). \end{aligned}$$

Svaka od dobijenih m razlika predstavlja priraštaj na odgovarajućem odsečku neke funkcije od *jedne* promenljive, koja, na tom odsečku, zadovoljava uslove Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti. Zato se priraštaj $f(a+h) - f(a)$ dalje predstavlja kao

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2, \dots, a_m + h_m)h_1 \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + \theta_m h_m)h_m, \end{aligned}$$

gde je $0 < \theta_i < 1$ za $i = 1, \dots, m$. Zbog pretpostavljene neprekidnosti parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ u tački a, svaki od koeficijenata poslednje linearne kombinacije može se napisati u obliku $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \alpha_i$, gde $\alpha_i \to 0$ $(h \to 0)$, $i = 1, \dots, m$. Na taj način je

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i,$$

pri čemu

$$\left| \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \frac{|h_i|}{\|h\|} \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Dakle, funkcija f je diferencijabilna u tački a. $\blacksquare$

Primetimo da uslov za diferencijabilnost dat u ovom stavu nije neophodan (za odgovarajući primer v. zadatak 2). Za funkciju koja u nekoj tački ima neprekidne parcijalne izvode kazaćemo da je *neprekidno diferencijabilna* u toj tački. Ako funkcija f ispunjava taj uslov u svim tačkama skupa A, kazaćemo da je neprekidno diferencijabilna na A. Skup svih takvih funkcija označavaćemo sa $C^1(A, \mathbf{R})$, a kad je jasno da je reč o realnim funkcijama, onda i sa $C^1(A)$.

Izvod u pravcu. Gradijent

Neka je $f\colon A \to \mathbf{R}$ funkcija definisana na otvorenom podskupu prostora $\mathbf{R}^m$. Kao što smo videli, njen parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ u nekoj tački $a \in A$ (ako postoji) određuje brzinu promene te funkcije duž prave paralelne i-toj koordinatnoj osi. Uvešćemo sada veličinu koja će određivati brzinu promene te funkcije u nekom pravcu koji ne mora biti paralelan nijednoj koordinatnoj osi.

U tom cilju uočimo proizvoljan jedinični vektor $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$. Za dovoljno malo $|t|$ ($t \in \mathbf{R}$), zbog otvorenosti skupa A, važiće $a + tl \in A$, pa će biti definisano $f(a + tl)$.

Definicija 2.1.3

Konačna granična vrednost (ako postoji)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{t}$$

zove se *izvod funkcije f u tački a u pravcu vektora l* i označava sa $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = f'_l(a)$.

Primeri 2.1.4

1° Ako je $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ jedinični vektor i-te ose, jasno je da je $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, tj. izvod u pravcu vektora e_i je jednostavno parcijalni izvod te funkcije u tački a po i-toj promenljivoj.

2° Neka je $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \neq 0\}$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ data sa $f(x, y, z) = e^{z/x} \sin y$ i neka je $a = (3, 0, -1)$, $l = (2/3, -1/3, 2/3)$. Tada je

$$\frac{f(a+tl) - f(a)}{t} = \frac{f\left(3 + \frac{2}{3}t, -\frac{1}{3}t, -1 + \frac{2}{3}t\right) - f(3, 0, -1)}{t}$$

$$= e^{(-3+2t)/(9+2t)} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{1}{3}t\right)}{t} \to -\frac{1}{3}e^{-1/3} \quad (t \to 0),$$

pa je dobijena vrednost jednaka $\frac{\partial f}{\partial l}(a)$. ▲

U opštem slučaju, postojanje parcijalnih izvoda funkcije f u nekoj tački a po svakoj od promenljivih nije dovoljno za postojanje njenog izvoda u proizvoljnom pravcu. Naredni stav daje dovoljan uslov za to.

Stav 2.1.3

Ako je funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}^m$) diferencijabilna u tački $a \in A$ i $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ proizvoljan jedinični vektor, tada funkcija f ima u tački a izvod u pravcu vektora l i važi

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) l_i.$$

Dokaz.

Kako je funkcija f diferencijabilna u tački a, to postoje njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L_i$. Takođe, njen priraštaj, generisan priraštajem $h = tl$ nezavisno promenljive, može se napisati u obliku

$$f(a + tl) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0)$$

$$= t \sum_{i=1}^{m} L_i l_i + o(t) \quad (t \to 0).$$

(Koristili smo da $t \to 0$ ako i samo ako $h \to 0$, što je očigledno.) Drugim rečima,

$$\frac{f(a+tl) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^{m} L_i l_i + \frac{o(t)}{t} \to \sum_{i=1}^{m} L_i l_i \quad (t \to 0),$$

što je i trebalo dokazati. ■

Zbir pomoću kojeg se u ovoj teoremi izražava izvod u pravcu je u stvari vrednost diferencijala funkcije f u tački a na vektoru l. On se može shvatiti i kao skalarni proizvod vektora $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)$ i vektora $l = (l_1, \dots, l_m)$. Prvi od tih vektora još ćemo zvati *gradijentom* funkcije f u tački a i označavati sa $\operatorname{grad} f(a)$. Dakle, za diferencijabilnu funkciju f je

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \operatorname{grad} f(a) \cdot l. \tag{3}$$

Primer 2.1.5

Kako je funkcija iz primera 4.2° očigledno diferencijabilna u tački a (parcijalni izvodi su joj neprekidni) i kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = e^{-1/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0,$$

to je

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (0, e^{-1/3}, 0) \cdot (2/3, -1/3, 2/3) = -\frac{1}{3}e^{-1/3}. \quad ▲$$

Primenjujući Koši-Švarcovu nejednakost na desnu stranu relacije (3) dobijamo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}(a)\right| \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\| \cdot \|l\| = \|\operatorname{grad} f(a)\|,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori $\operatorname{grad} f(a)$ i l istog pravca. Na taj način, izvod $\frac{\partial f}{\partial l}(a)$ će po apsolutnoj vrednosti biti najveći ako je vektor l kolinearan sa $\operatorname{grad} f(a)$ i ta maksimalna vrednost iznosi $\|\operatorname{grad} f(a)\|$. On će biti jednak nuli ako je vektor l normalan na vektoru $\operatorname{grad} f(a)$.

Sa daljim osobinama gradijenta realne funkcije vektorskog argumenta upoznaćemo se kasnije.

2.2. DIFERENCIJABILNOST VEKTORSKIH FUNKCIJA

Da bismo mogli da pojam diferencijabilnosti uvedemo i za vektorske funkcije više promenljivih, podsetimo se najpre nekih činjenica iz linearne algebre, vezanih za osobine linearnih funkcija („operatora") koje deluju iz $\mathbf{R}^m$ u $\mathbf{R}^n$.

Kao što je poznato, za funkciju $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ kažemo da je *linearna* ako za svaka dva elementa x, $y \in \mathbf{R}^m$ i svaka dva realna broja λ, μ važi

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

Svakoj linearnoj funkciji $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ odgovara jedinstveno određena matrica $[a_{ij}]$ formata $n \times m$. Naime, ako su $e_1, \dots, e_m$ elementi standardne baze prostora $\mathbf{R}^m$, $e_1^*, \dots, e_n^*$ elementi standardne baze prostora $\mathbf{R}^n$ i ako za $i = 1, \dots, m$ sa a_{ij} $(j = 1, \dots, n)$ označimo koordinate slike vektora e_i funkcijom L:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^* \qquad (i = 1, \dots, m),$$

onda se vrednost funkcije L u proizvoljnoj tački $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \mathbf{R}^m$ može izraziti kao

$$L(x) = L\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*\Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\Big) e_j^*,$$

ili, u uobičajenom matričnom zapisu,

$$L(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

gde smo vektore $x \in \mathbf{R}^m$ i $L(x) \in \mathbf{R}^n$ zapisali kao vektore-kolone. U matrici funkcije L su, dakle, u i-toj koloni zapisane koordinate slike $L(e_i)$ i-tog koordinatnog vektora prostora $\mathbf{R}^m$ funkcijom L. U daljem nećemo praviti razliku između linearne funkcije i njene matrice, pa ćemo ih označavati istim slovom. Zato ćemo i pisati Lx umesto $L(x)$ za vrednost funkcije L na vektoru x. Ta korespondencija između linearnih funkcija i matrica je, kao što znamo, ne samo bijekcija (pri fiksiranim bazama), već i izomorfizam odgovarajućih struktura, u smislu da linearnoj kombinaciji funkcija odgovara linearna kombinacija odgovarajućih matrica, a kompoziciji funkcija proizvod njihovih matrica.

Za linearnu funkciju, odnosno matricu, $L = [a_{ij}]_{n\times m}$ definišimo *normu* pomoću

$$\|L\| = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti izvodi se da za svaki vektor $x \in \mathbf{R}^m$ važi

$$\|Lx\|_n^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\Big)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\Big)\|x\|_m^2,$$

odnosno

$$\|Lx\|_n \leqslant \|L\| \cdot \|x\|_m. \tag{1}$$

Ovde smo indeksima m, odnosno n, označili norme prostora $\mathbf{R}^m$, odnosno $\mathbf{R}^n$, što ćemo ubuduće činiti samo ako postoji mogućnost zabune.

Sada dajemo najavljenu definiciju diferencijabilnosti vektorske funkcije više (realnih) promenljivih.

Definicija 2.2.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ i $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$ fiksirana tačka. Za funkciju f kažemo da je *diferencijabilna u tački* a ako se njen priraštaj $\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a)$, za $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ za koje je $a + h \in A$, može prikazati u obliku

$$\Delta f(a,h) = Lh + o(h) \quad (h \to 0),$$

gde je L linearna funkcija priraštaja h argumenta, koja se naziva *diferencijalom* funkcije f u tački a i označava sa $df(a)$.

Dakle, za diferencijabilnu funkciju je

$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0). \tag{2}$$

Na drugi način zapisano, to znači da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Nađimo koordinatni zapis relacije (2). U tom cilju označimo sa f_j koordinatne funkcije funkcije f, dakle funkcije $f_j\colon A \to \mathbf{R}$, takve da je za $x \in A$:

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big);$$

dalje, sa $[a_{ij}]_{n\times m}$ označimo matricu $L = df(a)$, a sa $\alpha_j(h)$ $(j = 1, \dots, n)$ označimo koordinatne funkcije preslikavanja označenog sa $o(h)$ u pomenutoj relaciji. Tada je, za $j = 1, \dots, n$,

$$\Delta f_j(a,h) = f_j(a+h) - f_j(a) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}h_i + \alpha_j(h),$$

gde $\alpha_j(h)/\|h\| \to 0$ $(h \to 0)$. Na osnovu definicije 1.2 i stava 1.1 zaključujemo da je svaka od realnih funkcija f_j diferencijabilna u tački a i da je $a_{ij} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$

$(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$. Lako je videti da i obrnuto, diferencijabilnost svih funkcija f_j povlači diferencijabilnost funkcije f, pri čemu diferencijal (kao linearna funkcija priraštaja h argumenta) ima matricu

$$df(a) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]_{n\times m}; \tag{3}$$

drugim rečima, on dejstvuje po pravilu

$$df(a)h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)h_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)h_i \end{bmatrix},$$

gde smo vektore h i $df(a)h$ zapisali kao vektore-kolone (što ćemo i dalje obično činiti).

Prethodnim razmatranjima, uzimajući u obzir i stav 1.1, kao i poznatu vezu između neprekidnosti vektorske funkcije i njenih koordinatnih funkcija, dokazali smo sledeći

Stav 2.2.1

Diferencijabilna u tački $a \in A$ funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ neprekidna je u toj tački i ima u njoj jednoznačno određen diferencijal $df(a)$ sa matricom (3). ■

Matrica (3) diferencijala $df(a)$ naziva se *Jakobijevom* matricom* funkcije f u tački a. U slučaju $m = n$, njena determinanta $\det df(a)$ naziva se *jakobijanom* funkcije f u tački a. Jakobijan preslikavanja igra važnu ulogu u mnogim problemima vezanim za osobine tog preslikavanja. Ako je preslikavanje f dato pomoću svojih koordinatnih preslikavanja $f_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, m$, jakobijan $\det df(a)$ označavaćemo još i sa

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{vmatrix}$$

Primeri 2.2.1

1° Neka je $A = \{(r, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbf{R}^2$ i $f\colon A \to \mathbf{R}^2$ funkcija data sa

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Tada je f diferencijabilna u svakoj tački $(r, \theta) \in A$ i važi

$$df(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \det df(r, \theta) = r.$$

* K. G. J. Jacobi (1804–1851), nemački matematičar

2° Slično, funkcija

$$f(r, \varphi, \theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi),$$

definisana na skupu $A = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}$, diferencijabilna je u svakoj njegovoj tački, pri čemu je

$$df(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det df(r, \varphi, \theta) = r^2\sin\varphi. \quad ▲$$

Kažemo da je funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ *neprekidno diferencijabilna* u nekoj tački $a \in A$ ako su sve njene koordinatne funkcije $f_j\colon A \to \mathbf{R}$ neprekidno diferencijabilne u a. Skup svih funkcija iz A u $\mathbf{R}^n$, neprekidno diferencijabilnih u svakoj tački $a \in A$, označavaćemo sa $C^1(A, \mathbf{R}^n)$.

2.3. PRAVILA DIFERENCIRANJA

Pravila nalaženja diferencijala vektorskih (specijalno, realnih) funkcija više promenljivih u osnovi su ista kao kod realnih funkcija realne promenljive. Navodimo najpre pravilo o linearnosti operacije diferenciranja.

Teorema 2.3.1

Neka su funkcije $f, g\colon A \to \mathbf{R}^n$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ diferencijabilne u tački $a \in A$ i neka su λ i μ realni brojevi. Tada je funkcija $\lambda f + \mu g$ diferencijabilna u tački a i važi

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Dokaz.

Neka je $h \in \mathbf{R}^m$, takvo da $a + h \in A$. Po definiciji je

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0),$$
$$g(a+h) - g(a) = dg(a)h + o(h) \quad (h \to 0).$$

Odatle je

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(a+h) - (\lambda f + \mu g)(a) &= \lambda[f(a+h) - f(a)] + \mu[g(a+h) - g(a)] \\ &= \lambda[df(a)h + o(h)] + \mu[dg(a)h + o(h)] \\ &= (\lambda df(a) + \mu dg(a))h + o(h) \quad (h \to 0),\end{aligned}$$

što znači da je funkcija $\lambda f + \mu g$ diferencijabilna u tački a i da joj je diferencijal u toj tački jednak $\lambda df(a) + \mu dg(a)$. ■

Za proizvoljne funkcije sa vektorskim vrednostima nemaju smisla operacije množenja i deljenja. Međutim, u slučaju realnih funkcija one su definisane i važe analogna pravila (sa analognim dokazima) za njihovo diferenciranje kao u slučaju funkcija jedne promenljive.

Teorema 2.3.2

Neka su funkcije f, $g\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ *diferencijabilne u tački* $a \in A$. *Tada su i funkcije* fg *i* f/g *(poslednja ako je* $g(a) \neq 0$*) diferencijabilne u* a *i važe jednakosti*

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a),$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{[g(a)]^2}. \quad \blacksquare$$

Diferencijabilnost složene funkcije

Teorema 2.3.3

Neka su $A \subset \mathbf{R}^m$ *i* $B \subset \mathbf{R}^n$ *otvoreni skupovi,* $f\colon A \to B$ *i* $g\colon B \to \mathbf{R}^p$. *Ako je funkcija* f *diferencijabilna u tački* $a \in A$, *a funkcija* g *diferencijabilna u tački* $b = f(a)$, *tada je složena funkcija* $g \circ f$ *diferencijabilna u tački* a *i važi*

$$d(g\circ f)(a) = dg(b)\circ df(a) \tag{1}$$

(na desnoj strani je kompozicija dve linearne funkcije).

Dokaz.

Neka je $h \in \mathbf{R}^m$ priraštaj argumenta funkcije f, takav da je $a + h \in A$. Označimo $k = f(a+h) - f(a)$, pa je $g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = g(b+k) - g(b)$. Zbog neprekidnosti funkcije f u tački a važi $k \to 0$ čim $h \to 0$. Na osnovu diferencijabilnosti funkcija f i g u odgovarajućim tačkama imamo:

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0),$$
$$g(b+k) - g(b) = dg(b)k + o(k) \quad (k \to 0).$$

Dakle,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) &= g(b+k) - g(b) = dg(b)k + o(k)\\ &= dg(b)\big(f(a+h) - f(a)\big) + o(k)\\ &= dg(b)\big(df(a)h + o(h)\big) + o(k)\\ &= \big(dg(b)\circ df(a)\big)h + dg(b)\big(o(h)\big) + o(k) \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

Dokažimo da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|dg(b)\big(o(h)\big)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2}$$

Neka je $\varepsilon(h)$ vektorska funkcija (sa vrednostima u $\mathbf{R}^n$) koja je označena sa $o(h)$ i za koju je, dakle, $\lim_{h\to 0} \|\varepsilon(h)\|/\|h\| = 0$. Vrednost linearne funkcije $dg(b)$ na tom vektoru može se, primenom nejednakosti (1) odeljka 2, oceniti kao

$$\|dg(b)\big(\varepsilon(h)\big)\|_p \leqslant \|dg(b)\| \cdot \|\varepsilon(h)\|_n.$$

Sada je

$$\frac{\|dg(b)\big(\varepsilon(h)\big)\|_p}{\|h\|_m} \leqslant \|dg(b)\| \frac{\|\varepsilon(h)\|_n}{\|h\|_m} \to 0 \quad (h \to 0),$$

čime je dokazana relacija (2). Dakle je $dg(b)\big(o(h)\big) = o(h)$ $(h \to 0)$. Još jednostavnije se dokazuje i da je $\lim_{h\to 0} \|o(k)\|/\|h\| = 0$, tj. $o(k) = o(h)$ $(h \to 0)$. Zato je

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = \big(dg(b)\circ df(a)\big)h + o(h) \quad (h \to 0),$$

što i dokazuje teoremu. ■

Napišimo eksplicitno, pomoću odgovarajućih Jakobijevih matrica, relaciju (1). Kao što znamo, matrica linearne funkcije $df(a)$ je oblika $\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]$ $(i = 1, \dots, m;$ $j = 1, \dots, n)$, a matrica linearne funkcije $dg(b)$ je oblika $\left[\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\right]$ $(j = 1, \dots, n;$ $k = 1, \dots, p)$, gde su sa $y = (y_1, \dots, y_n)$ označeni elementi prostora $\mathbf{R}^n$. Relacija (1) sada glasi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(g_1\circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g_1\circ f)}{\partial x_m}(a) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial(g_p\circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g_p\circ f)}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(b) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_n}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata u ovoj matričnoj jednakosti dobijamo sledeće pravilo nalaženja parcijalnih izvoda složene funkcije više promenljivih:

$$\frac{\partial(g_k\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, p). \tag{3}$$

Naglasimo, međutim, da dokazana teorema 3 govori nešto više od samih jednakosti (3) — ona tvrdi i da je složena vektorska funkcija diferencijabilna.

Specijalno, ako je $p = 1$, tj. ako je g realna funkcija, jednakosti (3) dobijaju oblik

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m),$$

gde se podrazumeva da se izvodi $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ računaju u tački a, a izvodi $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ u tački $b = f(a)$, i gde je stavljeno $y_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$ $(j = 1, \dots, n)$.

Posledica 2.3.1

Neka su ispunjeni uslovi teoreme 3, pri čemu je $m = n = p$. Tada za jakobijane odgovarajućih preslikavanja važi

$$\det d(g\circ f)(a) = \det dg(b)\det df(a),$$

tj.

$$\frac{D(z_1,\dots,z_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}(a) = \frac{D(z_1,\dots,z_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(b)\cdot\frac{D(y_1,\dots,y_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}(a),$$

gde su $y_i = f_i(x_1,\dots,x_m)$, $i = 1,\dots,m$ koordinatne funkcije preslikavanja f, a $z_i = g_i(y_1,\dots,y_m)$ koordinatne funkcije preslikavanja g, $i = 1,\dots,m$.

Dokaz.

Ovo tvrđenje sledi iz prethodne teoreme i poznatog pravila o računanju determinante proizvoda dveju kvadratnih matrica. ■

2.4. TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI

Prilikom izvođenja teoreme o srednjoj vrednosti za funkcije više promenljivih moraćemo da bitno razlikujemo slučajeve realne i vektorske funkcije. Za realnu funkciju više promenljivih teorema o srednjoj vrednosti predstavlja jednostavno uopštenje Lagranžove teoreme za funkcije jedne promenljive.

Teorema 2.4.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $a = (a_1,\dots,a_m) \in A$ i $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbf{R}^m$, takav da segment

$$[a, a+h] = \{\, x \mid x = a + th,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \,\}$$

leži u A. Ako je funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$ neprekidna u svim tačkama tog segmenta i diferencijabilna u svim tačkama intervala

$$(a, a+h) = \{\, x \mid x = a + th,\ 0 < t < 1 \,\},$$

onda postoji tačka $c = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$, tog intervala, takva da važi

$$f(a+h) - f(a) = df(c)h = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+\theta h_1,\dots,a_m+\theta h_m)h_i.$$

Dokaz.

Neka je $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ funkcija definisana sa $\varphi(t) = f(a+th)$ za $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ona se može shvatiti kao složena funkcija $\varphi = f\circ\psi$, gde je $\psi\colon [0,1] \to [a, a+h]$ linearna funkcija data sa $\psi(t) = a + th$. Funkcija φ je neprekidna na $[0,1]$, kao kompozicija

neprekidnih funkcija; ona je i diferencijabilna na $(0,1)$ i njen diferencijal je, prema teoremi 3.3, jednak

$$d\varphi(t) = df(a+th)\circ d\psi(t) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i.$$

Primenjujući na tu funkciju Lagranžovu teoremu, s obzirom da je $\varphi(1) = f(a+h)$, $\varphi(0) = f(a)$, zaključujemo da postoji broj θ, $0 < \theta < 1$, odnosno vektor $c = a + \theta h \in (a, a+h)$, takav da važi

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)h_i = df(c)h. \quad \blacksquare$$

U navedenom obliku teorema o srednjoj vrednosti ne može se preneti na slučaj vektorskih funkcija (v. zadatak 10). Da bismo došli do odgovarajućeg iskaza u vektorskom slučaju, daćemo prvo novi oblik Lagranžovoj teoremi za realne funkcije realne promenljive. Naime, iz

$$f(a+h) - f(a) = f'(c)h, \qquad a < c < a+h,$$

sledi da je

$$|f(a+h) - f(a)| = |f'(c)|\cdot|h| \leqslant |h| \sup_{c\in(a,a+h)}|f'(c)| = |h| \sup_{0<t<1}|f'(a+th)|.$$

Specijalno, ako je funkcija f neprekidno diferencijabilna na $[a, a+h]$, imaćemo

$$|f(a+h) - f(a)| \leqslant |h| \sup_{c\in[a,a+h]}|f'(c)| = |h| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f'(a+th)|.$$

U slučaju vektorske funkcije više promenljivih apsolutne vrednosti zamenićemo odgovarajućim normama, a izvod diferencijalom, pa dolazimo do sledeće formulacije.

Teorema 2.4.2

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija i tačke a, $h \in \mathbf{R}^m$ takve da $[a, a+h] \subset A$. Tada je

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \|h\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|df(a+th)\|.$$

Dokaz.

Za proizvoljno fiksirano $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{R}^n$ posmatrajmo realnu funkciju

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j f_j(a+th), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

gde su f_j koordinatne funkcije funkcije f. Ona je neprekidna na $[0,1]$, a njen izvod na $[0,1]$ iznosi

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j df_j(a+th)h$$

i on je neprekidan: $\varphi' \in C[0,1]$. Primenjujući Lagranžovu teoremu na funkciju φ, a zatim Koši-Švarcovu nejednakost i relaciju (1) odeljka 2, dobijamo

$$|\varphi(1)-\varphi(0)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\varphi'(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|z\| \cdot \|df(a+th)h\|$$
$$\leqslant \|z\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\| \cdot \|h\|.$$

Zato je

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\big(f_j(a+h)-f_j(a)\big)\right| \leqslant \|z\| \cdot \|h\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\|.$$

Stavimo u ovu nejednakost $z = f(a+h)-f(a)$, tj. $z_j = f_j(a+h)-f_j(a)$. Dobijamo

$$\|f(a+h)-f(a)\|^2 \leqslant \|f(a+h)-f(a)\| \cdot \|h\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\|.$$

Ako je $f(a+h)-f(a)=0$, tvrđenje teoreme je trivijalno. U protivnom, skraćivanjem poslednje nejednakosti dobijamo nejednakost koju dokazujemo. ■

Pomenimo da ova teorema važi pod slabijim pretpostavkama da je f neprekidna na $[a,a+h]$, a diferencijabilna samo na $(a,a+h)$, pri čemu se supremum uzima po t za koje je $0<t<1$ (za dokaz v. npr. [25]).

Jedna od najvažnijih posledica Lagranžove teoreme je da samo konstantne funkcije na intervalu imaju izvod jednak nuli. Za vektorske funkcije više promenljivih to tvrđenje se formuliše na sledeći način.

Stav 2.4.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ oblast (dakle, otvoren i povezan skup) i $f: A \to \mathbf{R}^n$ diferencijabilna funkcija. Ako je za svako $x \in A$, $df(x)=0$ (tj. ako f u svakoj tački x ima Jakobijevu matricu čiji su svi elementi jednaki nuli), onda je funkcija f konstantna.

Dokaz.

1° Razmotrimo najpre slučaj kada je skup A konveksan. Uočimo proizvoljne tačke a, $a+h \in A$ i na segment $[a,a+h]$ (koji je ceo sadržan u A) primenimo prethodnu teoremu. Dobijamo $\|f(a+h)-f(a)\|=0$, tj. $f(a+h)=f(a)$. Dakle, funkcija f je konstantna na skupu A.

2° Pretpostavimo sada da je A proizvoljan otvoren i povezan skup. Za svaku njegovu tačku a postoji kugla $K(a,r) \subset A$. Kako je kugla konveksan skup, prema prvom delu dokaza, funkcija f je konstantna na svakoj od tih kugli.

Označimo $B = f(A) \subset \mathbf{R}^n$; cilj nam je da dokažemo da je B jednočlan skup. Uočimo proizvoljan vektor $b \in B$. Kako je f neprekidna funkcija, a jednočlani skup $\{b\}$ je zatvoren, to je i skup $f^{-1}(\{b\})$ zatvoren (v. teoremu 9.4.1 iz M.A.I). Međutim, taj skup mora biti i otvoren. Naime, za svaku tačku $a \in f^{-1}(\{b\})$ (tj. za koju je $f(a)=b$), prema rečenom postoji okolina na kojoj je funkcija f konstantna, tj. takođe ima vrednost b. Kako je skup A povezan, on ne može imati otvoreno-zatvoren podskup, različit od $\emptyset$ i A (v. stav 9.6.1 iz M.A.I). Kako skup $f^{-1}(\{b\})$ nije prazan, to je $f^{-1}(\{b\})=A$. Drugim rečima, za svako $x \in A$ je $f(x)=b$, što i znači da je funkcija f konstantna na A. ■

2.5. PARCIJALNI IZVODI VIŠEG REDA. TEJLOROVA FORMULA

Neka je $f: A \to \mathbf{R}$ realna funkcija, definisana na otvorenom skupu $A \subset \mathbf{R}^m$ i neka za neko $i \in \{1,\dots,m\}$ postoji parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ u svim tačkama toga skupa. Tada je i on realna funkcija, definisana na A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: A \to \mathbf{R}$, pa se za neko $j \in \{1,\dots,m\}$ može postaviti pitanje o postojanju parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj x_j u nekoj tački $a \in A$.

Definicija 2.5.1

Ako postoji parcijalni izvod $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, njega zovemo *drugim parcijalnim izvodom* funkcije f u tački a, po promenljivim x_i, x_j (tim redom) i označavamo sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

U slučaju kada je $i=j$, odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Ako je $i \neq j$, taj parcijalni izvod zovemo mešovitim. U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

mogu imati različite vrednosti.

Primer 2.5.1

Neka je funkcija $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ data sa

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

za $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0)=0$. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

za $(x,y) \neq (0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, pa je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1.$$

Na sličan način se dobija $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=1$, pa je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0). \quad \blacktriangle$$

Pod određenim dodatnim pretpostavkama koje su opisane u narednoj teoremi, jednakost mešovitih parcijalnih izvoda je obezbeđena.

Teorema 2.5.1

Neka funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$ *(*A *je otvoren podskup* $\mathbf{R}^m$*) ima druge mešovite parcijalne izvode*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad i \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

za sve $x \in A$ *i neka su u datoj tački* $a \in A$ *ti izvodi neprekidni. Tada su oni u toj tački i jednaki.*

Dokaz.

Kako se prilikom određivanja izvoda koji se pominju u ovoj teoremi menjaju samo i-ta i j-ta koordinata argumenta, dok ostale ostaju fiksirane, to, bez ograničenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $m = 2$, tj. da je f funkcija dveju promenljivih $f(x, y)$, a da je tačka u kojoj se izvodi traže (a, b). Treba da dokažemo da je pod datim pretpostavkama

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b). \tag{1}$$

Zbog otvorenosti skupa A, za dovoljno male (po apsolutnoj vrednosti) priraštaje h, $k \in \mathbf{R}$, paralelogram sa temenima (a, b), $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ i $(a + h, b + k)$ biće podskup skupa A. Posmatrajmo pomoćne funkcije $g(t) = f(a + th, b + k) - f(a+th, b)$ i $h(t) = f(a+h, b+tk)-f(a, b+tk)$, definisane za $t \in [0, 1]$. Primenjujući na njih po dva puta Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti, dobijamo da je za neke $\theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ ispunjeno

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) = g'(\theta_1) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b)\right] h \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) hk, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) = h'(\eta_1) &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b + \eta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \eta_1 k)\right] k \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \eta_2 h, b + \eta_1 k) hk. \end{aligned}$$

Međutim, razlike $g(1) - g(0)$ i $h(1) - h(0)$ su među sobom jednake. Naime, svaka od njih ima vrednost

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

Dakle je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \eta_2 h, b + \eta_1 k).$$

Zbog pretpostavljene neprekidnosti ovih mešovitih izvoda u tački (a, b), dobijamo da zaista važi relacija (1). ■

Parcijalni izvodi višeg reda definišu se induktivno. Parcijalni izvod reda n funkcije f u tački a po promenljivim $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ (tim redom) označava se sa

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}(a), \tag{2}$$

pri čemu neki od indeksa $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ mogu biti i jednaki među sobom. Kao i kod drugih parcijalnih izvoda, poredak diferenciranja u opštem slučaju utiče na vrednost tog izvoda. No, u slučaju da su ti izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, taj poredak više neće biti bitan, na osnovu teoreme 1. Specijalno, ako su svi parcijalni izvodi n-tog reda neke funkcije f neprekidni u svim tačkama skupa A — skup svih takvih funkcija označavaćemo sa $C^n(A, \mathbf{R})$ ili samo sa $C^n(A)$ — važiće

Posledica 2.5.1

Ako $f \in C^n(A, \mathbf{R})$*, tada se vrednost izvoda* (2) *ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa* $i_1, \ldots, i_n$. ■

Za funkcije klase $C^n(A, \mathbf{R})$ još ćemo reći da su n *puta neprekidno diferencijabilne.* Za n-ti parcijalni izvod takve funkcije koristićemo oznaku

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ celi brojevi, takvi da je $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$ i $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$.

Tejlorova formula

Tejlorova formula, sa ostatkom u Lagranžovom obliku, za realnu funkciju jedne promenljive može da se napiše u obliku

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} h^k \frac{d^k}{dx^k} f(a) + R_n(a, h),$$

gde je

$$R_n(a, h) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kod prenošenja te formule na slučaj funkcije više promenljivih, izrazi koji u njoj učestvuju se prilično komplikuju. Da bismo ih ipak relativno kratko zapisali, prihvatimo najpre neke konvencije.

Najpre, vrednost diferencijala $df(x)h$ funkcije $f\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ u tački $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$, računatog za vrednost priraštaja $h = (h_1, \ldots, h_m)$, može se formalno zapisati kao

$$df(a)h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) f(a).$$

Uvedimo zatim formalni „kvadrat“ poslednje zagrade pomoću

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a) = \sum_{i_1, i_2} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a),$$

gde se sumiranje vrši po svim indeksima i_1, i_2 od 1 do m. Slično, za proizvoljno $k \in \mathbf{N}$, pod pretpostavkom da $f \in C^k(A)$, definišimo

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a)=\sum_{i_1,\ldots,i_k} h_{i_1}\cdots h_{i_k}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(a),$$

gde svi indeksi $i_1, \ldots, i_k$ uzimaju sve vrednosti od 1 do m. Primetimo da se poslednja suma, primenom polinomne formule, može napisati i u obliku

$$\sum \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}(a),$$

gde se sad sumiranje vrši po svim mogućim nenegativnim celim brojevima $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, takvim da je $\alpha_1+\cdots+\alpha_m = k$.

Formulišimo sada Tejlorovu formulu za realnu funkciju m promenljivih sa ostatkom u Lagranžovom obliku.

Teorema 2.5.2

Neka je $f \in C^{n+1}(A, \mathbf{R})$, gde je A otvoren podskup $\mathbf{R}^m$ i neka segment $[a, a+h]$ ceo pripada skupu A. Tada postoji realan broj $\theta \in (0,1)$, takav da je

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a)+R_n(a,h), \tag{3}$$

gde je

$$R_n(a,h)=\frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(a+\theta h). \tag{4}$$

Dokaz.

Posmatrajmo funkciju $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, definisanu sa $\varphi(t) = f(a+th)$, već korišćenu u dokazu teoreme 4.1. Prema pravilima za nalaženje izvoda složene funkcije, dobijamo da $\varphi \in C^{n+1}[0,1]$ i da je

$$\varphi'(t)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)+\cdots+h_m\frac{\partial f}{\partial x_m}(a+th)$$

(videti i dokaz teoreme 4.1); zatim,

$$\varphi''(t)=\sum_{i_1,i_2=1}^{m} h_{i_1}h_{i_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(a+th)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a+th)$$

i, uopšte, za proizvoljno $k \in \{1,\ldots,n+1\}$:

$$\varphi^{(k)}(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a+th).$$

Primenjujući na funkciju φ na segmentu $[0,1]$ Tejlorovu formulu sa Lagranžovim ostatkom za funkcije jedne promenljive, zaključujemo da postoji broj $\theta \in (0,1)$, takav da važe formule (3) i (4). ■

Ako se u dokazu prethodne teoreme koristi Tejlorova formula sa ostatkom u nekom drugom obliku, dobiće se Tejlorova formula za funkcije više promenljivih sa odgovarajućim ostatkom. Tako, na primer, ako je $f \in C^n(A, \mathbf{R})$ i $a \in A$, važi formula (3) sa ostatkom $R_n(a,h)$ u Peanovom obliku,

$$R_n(a,h) = o(\|h\|^n) \quad (h \to 0). \tag{5}$$

Primer 2.5.2

Napišimo u razvijenom obliku formulu (3) sa ostatkom (5) za $n = 3$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k)-f(a,b) &= \left[h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] \\ &+\frac{1}{6}\left[h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\right] \\ &+o\big((h^2+k^2)^{3/2}\big), \qquad (h,k)\to(0,0). \end{aligned}$$ ▲

2.6. LOKALNI EKSTREMUMI

Pojam lokalnog ekstremuma se za realne funkcije više promenljivih definiše analogno slučaju funkcija jedne promenljive.

Definicija 2.6.1

Neka je funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$ definisana u nekoj okolini $U(a)$ tačke $a \in A \subset \mathbf{R}^m$. Ako je za svako $x \in U(a)$ ispunjeno

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{odnosno } f(x) < f(a) \text{ za } x \neq a),$$

kažemo da funkcija f ima u tački a *lokalni maksimum* (odn. *strogi lokalni maksimum*) jednak $f(a)$. Slično se definiše (*strogi*) *lokalni minimum*. (Stroge) lokalne maksimume i minimume jednim imenom zovemo (*strogim*) *lokalnim ekstremumima*.

Primetimo da su lokalni ekstremumi, prema ovoj definiciji, uvek postignuti u unutrašnjim tačkama domena funkcije. O tzv. rubnim ekstremumima govorićemo nešto kasnije.

Kao i kod funkcija jedne promenljive, za diferencijabilne funkcije postoji jednostavan neophodan uslov za postojanje lokalnog ekstremuma.

Stav 2.6.1

Neka funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$ u tački $a \in A \subset \mathbf{R}^m$ ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstremum. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)=0.$$

Specijalno, ako je f diferencijabilna u a, onda je $df(a) = 0$.

Dokaz.

Neka je $K(a,r)$ kugla u kojoj je definisana funkcija f i u kojoj važi $f(x) \leqslant f(a)$ (odn. $f(x) \geqslant f(a)$) za sve x. Za proizvoljno $i \in \{1,\dots,m\}$ posmatrajmo funkciju $g\colon (a_i - r, a_i + r) \to \mathbf{R}$, definisanu sa

$$g(x_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_m)$$

za $x_i \in (a_i - r, a_i + r)$. Ta funkcija ima lokalni ekstremum u tački a_i, pa je $g'(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. ∎

Unutrašnje tačke domena funkcije f u kojima su svi parcijalni izvodi jednaki nuli nazvaćemo *stacionarnim*. Preostali deo ovog odeljka posvećen je ispitivanju prirode stacionarnih tačaka, tj. nalaženju dovoljnih uslova pod kojima funkcija više promenljivih u svojoj stacionarnoj tački zaista ima lokalni ekstremum. Za formulisanje takvih uslova biće nam potrebni neki pojmovi iz linearne algebre koje ćemo sada navesti.

Definitne kvadratne forme

Realna funkcija m promenljivih oblika

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$$

zove se *kvadratna forma* promenljivih $h_1, \dots, h_m$. Matrica $A(\Phi) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ zove se *matrica kvadratne forme* Φ. Za tu matricu uvek možemo pretpostaviti da je *simetrična*, tj. da je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j. Za formu Φ se kaže da je *pozitivno* (*negativno*) *poludefinitna* ako za sve $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbf{R}^m$ važi

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) \geqslant 0 \qquad (\text{odn. } \Phi(h_1,\dots,h_m) \leqslant 0).$$

Ona je *pozitivno* (*negativno*) *definitna* ako za sve $h \neq 0$ važi

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) > 0 \qquad (\text{odn. } \Phi(h_1,\dots,h_m) < 0).$$

Najzad, forma Φ je *promenljivog znaka* ako postoje $h = (h_1,\dots,h_m)$, $k = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbf{R}^m$, takvi da je

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) > 0, \quad \Phi(k_1,\dots,k_m) < 0.$$

Primer 2.6.1

Kvadratna forma

$$\begin{aligned}\Phi_1(h_1,h_2,h_3) &= 2h_1^2 + 5h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3\\ &= (h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 - 2h_2)^2 + h_3^2\end{aligned}$$

je pozitivno definitna, jer je $\Phi_1(h_1,h_2,h_3) > 0$ za $(h_1,h_2,h_3) \neq (0,0,0)$. Forma

$$\Phi_2(h_1,h_2,h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3 = (h_1 + h_2 - h_3)^2$$

je pozitivno poludefinitna, ali ne i definitna, jer može biti $\Phi_2(h_1,h_2,h_3) = 0$ i kad nisu svi h_1, h_2, h_3 jednaki nuli. ▲

Za ispitivanje definitnosti kvadratne forme u linearnoj algebri se dokazuje sledeći *Silvesterov* kriterijum*.

* J. J. Sylvester (1814–1897), engleski matematičar

Stav 2.6.2

Neka je

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

simetrična matrica kvadratne forme $\Phi\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *i neka su*

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \det A(\Phi) \tag{1}$$

njeni glavni minori. Da bi forma Φ *bila pozitivno definitna neophodno je i dovoljno da su ti glavni minori pozitivni:*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad A_m > 0.$$

Da bi forma Φ *bila negativno definitna, neophodno je i dovoljno da ti minori naizmenično menjaju znak, s tim da je* $A_1 < 0$*:*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad \dots \quad . \ ∎$$

Primer 2.6.2

Forma Φ_1 iz primera 1 ima matricu

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i glavne minore jednake redom 2, 9, 9. Forma Φ_2 ima matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sa determinantom jednakom nuli. ▲

Dovoljni uslovi lokalnog ekstremuma

Dokažimo najpre sledeće pomoćno tvrđenje.

Lema 2.6.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ *otvoren skup i* $a_{ij}\colon A \to \mathbf{R}$ *neprekidne funkcije za* i, $j = 1, \dots, m$, *takve da je* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ *za sve* $x \in A$. *Za* $x \in A$ *neka je* Φ_x *kvadratna forma sa matricom* $[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^{m}$. *Ako je za neko* $a \in A$ *kvadratna forma* Φ_a *pozitivno definitna, tada postoji* $r > 0$, *tako da je za svako* x *iz kugle* $K(a,r)$ *forma* Φ_x *pozitivno definitna.*

Dokaz.

Realne funkcije $A_1, \dots, A_m$, definisane pomoću

$$A_1(x) = a_{11}(x), \quad A_2(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m(x) = \det[a_{ij}(x)],$$

neprekidne su za $x \in A$. Prema Silvesterovom kriterijumu, iz pozitivne definitnosti forme Φ_a sledi da su brojevi

$$A_1(a), \quad A_2(a), \quad \dots, \quad A_m(a)$$

pozitivni. Zbog neprekidnosti funkcija A_i, postoji pozitivan broj r, takav da su brojevi

$$A_1(x), \quad A_2(x), \quad \dots, \quad A_m(x)$$

takođe pozitivni za $x \in K(a,r)$. To i znači da je forma Φ_x pozitivno definitna. ■

Formulišimo sada najavljeno tvrđenje koje daje dovoljne uslove za postojanje (strogog) lokalnog ekstremuma funkcije više promenljivih.

Teorema 2.6.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $a \in A$ i $f \in C^2(A)$, pri čemu je a stacionarna tačka funkcije f, tj. $df(a) = 0$; neka je Φ kvadratna forma čija je matrica

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j=1}^{m}. \tag{2}$$

Tada:

1° ako je kvadratna forma Φ pozitivno definitna, funkcija f ima strogi lokalni minimum u tački a;

2° ako je kvadratna forma Φ negativno definitna, funkcija f ima strogi lokalni maksimum u a;

3° ako je kvadratna forma Φ promenljivog znaka, funkcija f u tački a nema lokalni ekstremum.

Dokaz.

1° Ako su ispunjene date pretpostavke, prema prethodnoj lemi, postoji broj $r > 0$, takav da je za sve $x \in K(a,r)$ pozitivno definitna kvadratna forma čija je matrica $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1}^{m}$. Za proizvoljno takvo x segment $[a,x]$ pripada $K(a,r)$, pa se na razliku $f(x) - f(a)$ može primeniti Tejlorova formula sa Lagranžovim ostatkom (teorema 6.2) za $n = 1$. Zbog stacionarnosti tačke a ona ima oblik:

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - a_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f\big(a + \theta(x-a)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(a + \theta(x-a)\big), \quad 0 < \theta < 1.$$

Drugim rečima, ta razlika je kvadratna forma promenljivih $x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m$, sa (simetričnom) matricom

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(a + \theta(x-a)\big)\right]_{i,j=1}^{m}.$$

Kako vektor $a + \theta(x-a)$ pripada takođe kugli $K(a,r)$, to je i ta kvadratna forma pozitivno definitna, što i znači da je $f(x) - f(a) > 0$ za sve $x \in K(a,r) \setminus \{a\}$. Dakle, u tački a je strogi lokalni minimum funkcije f.

2° Dovoljno je primeniti dokazano tvrđenje pod 1° na funkciju $-f$.

3° Ako je kvadratna forma Φ sa matricom (2) promenljivog znaka, onda postoje vektori $h = (h_1, \dots, h_m)$, $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{R}^m$, takvi da je

$$\Phi(h_1, \dots, h_m) > 0, \quad \Phi(k_1, \dots, k_m) < 0. \tag{3}$$

Za proizvoljno $\rho > 0$ odredimo tačke $x = a + \rho\frac{h}{\|h\|}$ i $y = a + \rho\frac{k}{\|k\|}$, za koje je očigledno $\|x - a\| = \|y - a\| = \rho$.

Napišimo sada Tejlorovu formulu za funkciju f u tački a sa Peanovim ostatkom, za vrednosti argumenta x, odnosno y,

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|x-a\|^2)$$
$$= \frac{\rho^2}{2\|h\|^2}\left[\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(1)\right]$$
$$= \frac{\rho^2}{2\|h\|^2}[\Phi(h_1, \dots, h_m) + o(1)] \qquad (\rho \to 0),$$
$$f(y) - f(a) = \frac{\rho^2}{2\|k\|^2}[\Phi(k_1, \dots, k_m) + o(1)] \qquad (\rho \to 0).$$

Kako veličine $\Phi(h_1, \dots, h_m)$ i $\Phi(k_1, \dots, k_m)$ ne zavise od ρ, to je, na osnovu (3), za dovoljno malo ρ,

$$f(x) - f(a) > 0, \quad f(y) - f(a) < 0,$$

što i znači da u svakoj okolini tačke a funkcija f ima vrednosti, kako manje, tako i veće od $f(a)$. Time je dokazano da ta funkcija u tački a nema lokalni ekstremum. ■

Primeri 2.6.3

1° Svaka od funkcija $f_1(x,y) = x^3 + y^3$ i $f_2(x,y) = x^4 + y^4$ ima jedinstvenu stacionarnu tačku $(0,0)$ i u toj tački karakterističnu kvadratnu formu identički jednaku nuli — dakle i pozitivno i negativno poludefinitnu, ali ne i definitnu. Prva od tih funkcija nema lokalni ekstremum u $(0,0)$, jer u proizvoljnoj okolini te tačke postoje vektori (x_1, y_1) i (x_2, y_2), takvi da je $f_1(x_1, y_1) < 0 < f_1(x_2, y_2)$. Funkcija f_2, međutim, u tački $(0,0)$ ima lokalni (i apsolutni) minimum jednak 0.

2° Odredimo tačke lokalnih ekstremuma funkcije

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2 + 2x_3,$$

gde je λ realan parametar.

Rešavajući sistem jednačina $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\lambda x_1 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 2 = 0$, dobijamo da je jedina stacionarna tačka ove funkcije $x = (0, -1, -1)$ (sem u slučaju $\lambda = 0$, kada su stacionarne sve tačke oblika $(x_1, -1, -1)$, $x_1 \in \mathbf{R}$). Zbog $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ za $i \neq j$, u toj tački karakteristična kvadratna forma ima oblik

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 2\lambda h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2.$$

Za $\lambda > 0$ ta forma je očigledno pozitivno definitna i funkcija f u tački $(0, -1, -1)$ ima lokalni minimum. Za $\lambda < 0$ ta forma je promenljivog znaka (na primer, tada je $\Phi(0,1,1) > 0$, $\Phi(1,0,0) < 0$), pa funkcija f u toj tački nema lokalni ekstremum. Ako je $\lambda = 0$, u svakoj od tačaka $(x_1, -1, -1)$ forma Φ je poludefinitna, no funkcija f tu ipak ima (ne samo lokalni) minimum jednak -2, jer je $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 - 2 \geqslant -2$ za sve $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ i $f(x_1, -1, -1) = -2$. ▲

U primerima se najčešće pojavljuju funkcije dveju promenljivih, pa ćemo navesti formulaciju teoreme 1 za taj slučaj.

Posledica 2.6.1

Neka je A otvoren skup u $\mathbf{R}^2$, $(a,b) \in A$, $f(x,y)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na A i $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Označimo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = t$. Tada:

1° ako je $r > 0$, $rt - s^2 > 0$, funkcija f u tački (a,b) ima strogi lokalni minimum;

2° ako je $r < 0$, $rt - s^2 > 0$, funkcija f u tački (a,b) ima strogi lokalni maksimum;

3° ako je $rt - s^2 < 0$, funkcija f u tački (a,b) nema lokalni ekstremum.

Dokaz.

Tvrđenja 1° i 2° neposredno slede iz teoreme 1 i stava 2. Dokažimo tvrđenje 3°, tj. dokažimo da je u slučaju $rt - s^2 < 0$ kvadratna forma

$$\Phi(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

promenljivog znaka.

Posmatrajmo najpre slučaj $r \neq 0$. Tada je

$$\Phi(h,k) = \frac{1}{r}[(rh + sk)^2 + (rt - s^2)k^2],$$

pa su, zbog $rt - s^2 < 0$, brojevi $\Phi(1,0) = r$ i $\Phi(s, -r) = r(rt - s^2)$ različitog znaka.

Ako je $r = 0$, tada iz uslova $rt - s^2 < 0$ sledi da je $s \neq 0$. Neka je $h \neq 0$ i k dovoljno malo tako da izraz $2sh + tk$ ima isti znak kao izraz $2sh$. Tada vrednosti kvadratne forme $\Phi(h,k) = k(2sh + tk)$ imaju različite znake za $k > 0$, odnosno $k < 0$, te je i u ovom slučaju ta kvadratna forma promenljivog znaka. ■

Ponovimo na kraju da se sve izloženo odnosi samo na tzv. unutrašnje lokalne ekstremume funkcija više promenljivih. Prilikom određivanja apsolutnih ekstremuma takvih funkcija neophodno je zajedno sa unutrašnjim stacionarnim tačkama ispitivati i tačke granice domena. Za takvo ispitivanje je često korisna tehnika određivanja tzv. uslovnog ekstremuma, o kojoj ćemo govoriti u sledećoj glavi. S druge strane, međutim, ako se traže samo apsolutni ekstremumi neke funkcije na ograničenom i zatvorenom (dakle kompaktnom) skupu, primenom Vajerštrasove teoreme može se potpuno izbeći ispitivanje karaktera stacionarnih tačaka.

Primer 2.6.4

Nađimo najveću i najmanju vrednost funkcije $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbf{R}$, date sa $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y^2 - 2y$.

Sistem jednačina $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4y - 2 = 0$ ima unutar kvadrata $(-1,1)^2$ dva rešenja: $(0, 1/2)$ i $(-1/2, 3/8)$. Dalje je $f(1,y) = 2y^2 + 1$, $f(-1,y) = 2y^2 - 1$, $f(x,1) = x^3 + 2x^2$, $f(x,-1) = x^3 - 2x^2 + 4$, pa se kao potencijalne tačke ekstremuma dobijaju i stacionarne tačke tih funkcija jedne promenljive (koje su na rubu datog kvadrata): $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(0,-1)$, kao i temena kvadrata $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ i $(-1,-1)$. Data funkcija je neprekidna, a kvadrat $[-1,1]^2$ je kompaktan skup, pa f na njemu dostiže svoju najmanju i najveću vrednost. One mogu biti samo među vrednostima funkcije f u nađenih 10 tačaka. Među njima je najmanja $f(-1,0) = -1$, a najveća $f(0,-1) = 4$, pa su to traženi ekstremumi funkcije f na $[-1,1]^2$. ▲

ZADACI

1. Pokazati da je funkcija $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, data sa $f(x) = \|x\|$, diferencijabilna svuda osim u tački $x = 0$.

2. Dokazati da funkcija $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, data sa $f(0,0) = 0$ i

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \text{za } (x,y) \neq (0,0),$$

ima u okolini tačke $(0,0)$ parcijalne izvode koji su prekidni u toj tački, ali je f ipak diferencijabilna u $(0,0)$.

3. Dokazati da je svaka linearna funkcija $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ ravnomerno neprekidna na $\mathbf{R}^m$.

4. Za funkciju $f\colon A \to \mathbf{R}$, gde je A oblast u $\mathbf{R}^m$, kaže se da je *homogena i ima stepen homogenosti* α ($\alpha \in \mathbf{R}$) ako za sve $x \in A$, $t \in \mathbf{R}$, takve da $tx \in A$ važi $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Funkcija f je *lokalno homogena sa stepenom homogenosti* α u oblasti A ako je ona homogena tog stepena u nekoj okolini svake tačke oblasti A. Dokazati da je funkcija f lokalno homogena stepena α u oblasti $A \subset \mathbf{R}^m$ ako i samo ako ona u toj oblasti zadovoljava *Ojlerov identitet*:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_m\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \equiv \alpha f(x).$$

5. Neka je f funkcija data u primeru 1.3 i $\varphi(t) = f(t,t)$ za $t \in \mathbf{R}$. Pokazati da se izvod funkcije φ u tački 0 ne može naći po pravilu diferenciranja složene funkcije.

6. Dokazati *Rolovu teoremu* za funkcije više promenljivih: ako je neprekidna funkcija $f\colon K[0,r] \to \mathbf{R}$ ($K[0,r] \subset \mathbf{R}^m$) jednaka nuli na granici kugle K, a diferencijabilna u njenoj unutrašnjosti $K(0,r)$, tada postoji tačka $x \in K(0,r)$ koja je stacionarna za funkciju f.

7. Neka je $f\colon I \to \mathbf{R}^m$ neprekidno preslikavanje segmenta $I = [0,1] \subset \mathbf{R}$ u $\mathbf{R}^m$, a $g\colon I \to \mathbf{R}$ neprekidna realna funkcija. Ako su f i g diferencijabilne u intervalu $(0,1)$ i za svako $x \in (0,1)$ važi $\|df(x)\| \leqslant g'(x)$, tada je $\|f(1) - f(0)\| \leqslant g(1) - g(0)$. Dokazati.

8. Neka je A otvoren i konveksan (ograničen ili neograničen) skup u $\mathbf{R}^m$ i $f\colon A \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija na A. Ako su svi parcijalni izvodi funkcije f ograničeni na A:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant K \quad \text{za } i = 1, \dots, m \text{ i } x \in A,$$

za neko $K \in \mathbf{R}$, tada je funkcija f ravnomerno neprekidna na A. Dokazati.

9. 1° Neka je $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *afino preslikavanje*, dato sa $f(x) = y_0 + Lx$, za $x \in \mathbf{R}^m$ (zapisano u obliku vektora-kolone), gde je y_0 fiksirani vektor iz $\mathbf{R}^n$, a L data $n \times m$ matrica. Dokazati da je f diferencijabilno za svako $x \in \mathbf{R}^m$ i da je $df(x) = L$.

2° Neka je A oblast u $\mathbf{R}^m$ i $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ diferencijabilna funkcija. Ako diferencijal $df(x)$ ne zavisi od $x \in A$, dokazati da je f zbir konstantne funkcije i restrikcije na A neke linearne funkcije.

10. Na primeru funkcije $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, date sa $f(x) = (\cos x, \sin x)$ pokazati da zaključak teoreme 4.1 o srednjoj vrednosti ne mora da važi za funkcije sa vektorskim vrednostima.

11. Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $a \in A$ i l (ne obavezno jedinični) vektor iz $\mathbf{R}^m$. Izvod funkcije f u tački a *po vektoru* l definiše se kao

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{t},$$

ako taj limes postoji i konačan je. Dokazati:

1° Ako je $c \in \mathbf{R}$ i postoji $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a)$, tada je

$$\frac{\partial f}{\partial (cl)}(a) = c\frac{\partial f}{\partial l}(a).$$

2° Neka su l_1 i l_2 dva vektora iz $\mathbf{R}^m$ i neka: (a) $\dfrac{\partial f}{\partial l_1}(x)$ postoji za x iz neke okoline tačke a; (b) $\dfrac{\partial f}{\partial l_1}$ je neprekidna funkcija u tački a; (c) postoji $\dfrac{\partial f}{\partial l_2}(a)$. Tada postoji izvod funkcije f u tački a po vektoru $l_1 + l_2$ i važi

$$\frac{\partial f}{\partial (l_1 + l_2)}(a) = \frac{\partial f}{\partial l_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial l_2}(a).$$

3° Primerom pokazati da formula 2° ne mora da važi bez pretpostavke (b).

12. Neka su f i g diferencijabilne realne funkcije u tački $a \in \mathbf{R}^m$ i neka je $c \in \mathbf{R}$. Dokazati: 1° $\operatorname{grad}(cf)(a) = c\operatorname{grad} f(a)$; 2° $\operatorname{grad}(f+g)(a) = \operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} g(a)$; 3° $\operatorname{grad} fg(a) = g(a)\operatorname{grad} f(a) + f(a)\operatorname{grad} g(a)$; 4° $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}[g(a)\operatorname{grad} f(a) - f(a)\operatorname{grad} g(a)]$ za $g(a) \neq 0$.

13. Neka je $f(0,0) = 0$ i

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \text{za } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Tada je f neprekidna na $\mathbf{R}^2$ i ima u svakoj tački $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ izvod u proizvoljnom pravcu. Međutim, f nije diferencijabilna na $\mathbf{R}^2$. Dokazati.

14. Neka $f \in C^{n+1}(U(a), \mathbf{R})$, gde je $U(a)$ okolina tačke $a \in \mathbf{R}^m$, i neka je segment $[a, a+h]$ sadržan u $U(a)$. Tada je

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a) + R_n(a,h),$$

$$R_n(a,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(a+th)\,dt.$$

15. Za svaki polinom P jedne realne promenljive važi sledeće tvrđenje: postoji $x_0 \in \mathbf{R}$, takvo da je za svako $x \in \mathbf{R}$: $|P(x_0)| \leqslant |P(x)|$. Na primeru polinoma $P(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$ pokazati da analogno tvrđenje ne važi za polinome više promenljivih.

16. Za funkciju $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ se kaže da je *konveksna* na $\mathbf{R}^m$ ako za svake dve tačke $x, y \in \mathbf{R}^m$ i za svako $\alpha \in [0,1]$ važi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Dokazati da je funkcija $f \in C^2(\mathbf{R}^m)$ konveksna na $\mathbf{R}^m$ ako i samo ako je za svako $x \in \mathbf{R}^m$ matrica

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1}^{m}$$

pozitivno definitna.

17. Neka je $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ konveksna funkcija (v. prethodni zadatak). Dokazati da za proizvoljne vektore $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^m$ i za pozitivne brojeve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ za koje je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, važi nejednakost

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

3. IMPLICITNE FUNKCIJE

3.1. POSTAVKA ZADATKA

Vrlo često u analizi, kao i u drugim oblastima matematike, neke promenljive, recimo x i y, vezane su relacijom oblika

$$F(x,y)=0. \tag{1}$$

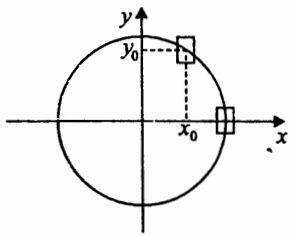
Po pravilu, za praktično proučavanje te veze korisno je napisati je u obliku

$$y=f(x), \tag{2}$$

tj. jednu od promenljivih *eksplicitno* izraziti pomoću druge. Međutim, iskustvo nam pokazuje da je do takvog oblika izražavanja funkcionalne zavisnosti obično teško, a često i nemoguće doći. Specijalno, najčešće ne postoji elementarna funkcija (2) pomoću koje se može izraziti veza (1), tj. takva funkcija da je

$$F\big(x,f(x)\big)=0.$$

Zato se pomenuti problem obično postavlja u drugačijem obliku: umesto da se zahteva da se funkcija (2) eksplicitno odredi, traži se da se dokaže da takva funkcija *postoji* i da je jedinstveno određena. Ako je to moguće učiniti, kažemo da je funkcija $y=f(x)$ *implicitno* zadata relacijom (1).



Sl. 3.1.1

Međutim, ni tako postavljeno pitanje nema uvek potvrdan odgovor. Posmatrajmo, na primer, jednačinu kruga

$$x^2+y^2=1. \tag{3}$$

Za svako x za koje je $|x|<1$ postoje dve vrednosti za y za koje važi (3) — to su

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}.$$

Na taj način, postoji više funkcija $y=f(x)$, definisanih na segmentu $[-1,1]$, sa vrednostima u $\mathbf{R}$, za koje važi $x^2+\big(f(x)\big)^2=1$. Ali, postoji mogućnost da

ograničavanjem skupova u kojima uzimaju vrednosti promenljive x i y ipak dobijemo samo jednu funkciju $y=f(x)$. Na primer, za $x_0\in(-1,1)$ i (jedno od) $y_0\in[-1,1]$ za koje je $x_0^2+y_0^2=1$ izaberimo pozitivne brojeve δ i ε tako da $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(-1,1)$ i da pravougaonik $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ seče samo onaj polukrug kruga $x^2+y^2=1$ (određen sa $y>0$, odnosno $y<0$) koji sadrži tačku (x_0,y_0). Tada je geometrijski očigledno (sl. 1) da je potpuno određena funkcija $f\colon(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$, takva da je $x^2+\big(f(x)\big)^2=1$ za sve $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Pomenimo, međutim, da ni ovako „ublaženi" zahtevi neće moći uvek da budu ostvareni. U prethodnom primeru uzmimo $x_0=1$. Očigledno je da, mada postoji samo jedno y_0 za koje je $x_0^2+y_0^2=1$, ma kako malim birali brojeve δ i ε, presek skupa $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ sa pravougaonikom $(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ neće biti grafik neke realne funkcije.

Ova glava biće uglavnom posvećena određivanju (dovoljnih) uslova koji obezbeđuju postojanje implicitne funkcije (2) koja je definisana relacijom (1) i to, po pravilu, u gore opisanom „lokalnom" smislu. Pri tom, promenljive x i y u relacijama (1) i (2) neće uvek uzimati vrednosti iz skupa $\mathbf{R}$. Dozvoljavajući da x, odnosno y, uzima vrednosti i iz višedimenzionih euklidskih prostora $\mathbf{R}^n$, dobijamo teoreme o egzistenciji kako realnih, tako i vektorskih funkcija, kako jedne, tako i više realnih promenljivih.

Pored teorema o egzistenciji pomenutih funkcija, daćemo i neke dodatne stavove koji omogućavaju ispitivanje njihovih osobina. Najzad, biće date i neke od mnogobrojnih primena pomenutih teorema.

3.2. IMPLICITNE FUNKCIJE SA REALNIM VREDNOSTIMA

Posmatrajmo najpre najjednostavniji slučaj kada promenljive x i y u relaciji (1) iz prethodnog odeljka uzimaju realne vrednosti, tj. postavimo pitanje o egzistenciji implicitne funkcije jedne realne promenljive koja uzima realne vrednosti. Dovoljni uslovi za „lokalno" postojanje takve funkcije dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 3.2.1

Neka je $A\subset\mathbf{R}^2$ *otvoren skup,* $(a,b)\in A$ *i neka je:*

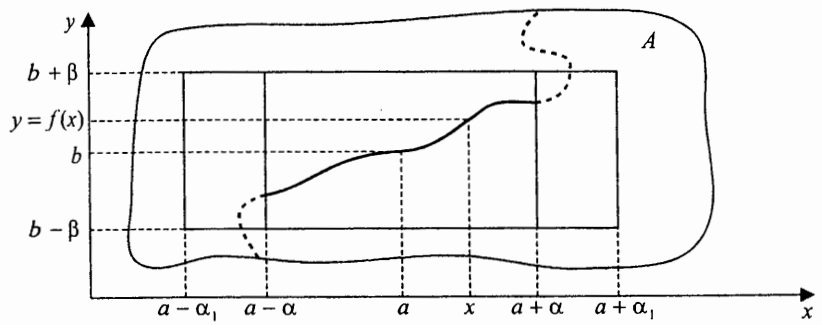
1° $F\colon A\to\mathbf{R}$ *neprekidna funkcija;*

2° $F(a,b)=0$;

3° *parcijalni izvod* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *postoji i neprekidan je na* A;

4° $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$.

Tada postoji okolina $W=U\times V$ *tačke* (a,b) *(gde je* $U=\{x\in\mathbf{R}\mid|x-a|<\alpha\}$, $V=\{y\in\mathbf{R}\mid|y-b|<\beta\}$*) i jednoznačno određena neprekidna funkcija* $f\colon U\to V$, *takva da je* $f(a)=b$ *i* $F\big(x,f(x)\big)=0$ *za* $x\in U$.



Sl. 3.2.1

Dokaz.

Pretpostavimo, određenosti radi, da je $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije $\frac{\partial F}{\partial y}$ postoji okolina tačke (a,b) u kojoj je $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$. Za tu okolinu možemo uzeti da je pravougaonik $[a-\alpha_1, a+\alpha_1]\times[b-\beta, b+\beta]$ koji leži unutar datog otvorenog skupa A. Posmatrajmo funkciju $F(a,y)$ jedne promenljive $y \in [b-\beta, b+\beta]$. Kako je $\frac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$, to ta funkcija strogo raste, pa s obzirom da je $F(a,b) = 0$, to je

$$F(a, b-\beta) < 0 \quad \text{i} \quad F(a, b+\beta) > 0.$$

Zbog neprekidnosti same funkcije F zaključujemo da odgovarajuće relacije važe i u nekoj okolini tačke a, tj. da postoji broj α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$, takav da je za sve $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ ispunjeno

$$F(x, b-\beta) < 0 < F(x, b+\beta).$$

Ako sada za svako takvo fiksirano x posmatramo funkciju $F(x,y)$ kao realnu funkciju promenljive y, definisanu na segmentu $[b-\beta, b+\beta]$, dobijamo da je to strogo rastuća neprekidna funkcija koja uzima vrednosti različitog znaka na krajevima tog segmenta. Dakle, postoji, jedinstveno određena, vrednost $y = f(x) \in (b-\beta, b+\beta)$, takva da je $F(x, f(x)) = 0$. Pri tom je jasno i $f(a) = b$, jer je $y = b$ jedina vrednost iz $(b-\beta, b+\beta)$ za koju je $F(a,y) = 0$.

Dokažimo da je ovako definisana funkcija $f: U \to V$ (gde je $U = (a-\alpha, a+\alpha)$, $V = (b-\beta, b+\beta)$) neprekidna. S obzirom da za svaku tačku $x \in U$ važe isti uslovi (za funkciju F) kao za tačku $x = a$, to je dovoljno dokazati neprekidnost funkcije f u tački a. Za dato ε, $0 < \varepsilon < \beta$, ponavljajući prethodni postupak, izaberimo δ, $0 < \delta < \alpha$, tako da za svako x za koje je $|x-a| < \delta$ postoji samo jedno y za koje je $|y-b| < \varepsilon$ i $F(x,y) = 0$; za to y će važiti $y = f(x)$. No, tada je $|f(x) - f(a)| = |y-b| < \varepsilon$ za $|x-a| < \delta$, što i znači da je funkcija f neprekidna u tački a. ■

Dopunićemo navedenu teoremu o egzistenciji implicitne funkcije stavom koji opisuje neka njena svojstva.

Stav 3.2.1

Neka, pored uslova 1°, 2°, 3° i 4° prethodne teoreme, funkcija F zadovoljava i uslov

5° *parcijalni izvod* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *postoji i neprekidan je na* A,

tj. neka $F \in C^1(A)$. *Tada je funkcija* f, *opisana u toj teoremi, neprekidno diferencijabilna, tj.* $f \in C^1(U)$ *i za* $x \in U$ *važi*

$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)). \tag{1}$$

Ako je $F \in C^p(A)$ *za neko* $p \in \mathbf{N}$, *tada je* $f \in C^p(U)$.

Dokaz.

Neka je $x \in U$ i neka je $h \in \mathbf{R}$ takvo da $x + h \in U$ (koristimo oznake iz prethodne teoreme). Označimo $y = f(x)$ i $f(x+h) - f(x) = k$. U okolini W funkcija F zadovoljava uslove za primenu teoreme o srednjoj vrednosti. Dakle, postoji broj θ, $0 < \theta < 1$, takav da je

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)k.$$

No, leva strana ove jednakosti jednaka je nuli, jer je i $F(x,y) = F(x, f(x)) = 0$ i $F(x+h, y+k) = F(x+h, f(x+h)) = 0$. Uzimajući u obzir da je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ u okolini W, dobijamo da je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x+\theta h, y+\theta k).$$

Kako je funkcija f neprekidna u tački x, to $h \to 0$ povlači $k \to 0$, a kako su parcijalni izvodi $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ neprekidni u tački (x,y), to prelaskom na limes kad $h \to 0$ dobijamo

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y),$$

gde je $y = f(x)$, čime je dokazana jednakost (1).

Iz neprekidnosti funkcija $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ u tački (x,y) sledi i neprekidnost funkcije f' u tački x.

Drugi deo stava dokazuje se indukcijom po p. ■

Nađimo, primera radi, izraz za drugi izvod implicitne funkcije f. Ako je funkcija F dvaput neprekidno diferencijabilna, diferencirajući jednakost (1) po x dobijamo

$$f''(x) = -\frac{1}{(\partial F/\partial y)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}f'(x)\right]\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'(x)\right]\right\},$$

pri čemu su svi izvodi funkcije F računati u tački $(x, f(x))$.

Primeri 3.2.1

1° Posmatrajmo ponovo primer jednačine kruga, odnosno funkcije $F(x,y) = x^2+y^2-1$ za $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. U ovom slučaju je očigledno funkcija F beskonačno diferencijabilna (tj. ima neprekidne izvode proizvoljnog reda) i pri tom je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

pa je uslov $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ zadovoljen ako je $y \neq 0$, tj. u onim tačkama krive $x^2+y^2=1$ za koje je $|x| < 1$. Znači, za svaku tačku (x,y) kruga, osim za tačke $(1,0)$ i $(-1,0)$, postoji okolina u kojoj je jednoznačno određena beskonačno diferencijabilna funkcija $y = f(x)$, takva da je $F(x,f(x)) = 0$. Pri tom je

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y},$$

gde je $y = f(x)$. Daljim diferenciranjem dobijamo

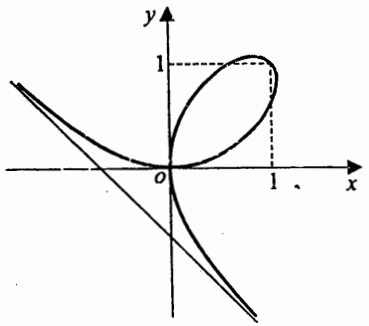
$$f''(x) = -\frac{y-xy'}{y^2} = -\frac{y+x\cdot\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

itd. Naravno, u ovom slučaju moguće je ove formule proveriti i direktno, diferencirajući poznati eksplicitni izraz za funkciju f (primetimo da će on biti $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ili $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, zavisno od toga kog znaka je ordinata izabrane tačke (x,y)).

2° Odredimo tangentu *Dekartovog lista* $F(x,y) = x^3+y^3-2xy = 0$ u tački $(1,1)$ (slika 2).

U toj tački je $F(1,1) = 0$ i

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 3x^2-2y \Big|_{(1,1)} = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 3y^2-2x \Big|_{(1,1)} = 1 \neq 0,$$



Sl. 3.2.2

pa je u nekoj njenoj okolini određena funkcija $y = f(x)$, takva da je $f(1) = 1$ i

$$f'(1) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(1,1) = -1.$$

Dakle, tražena tangenta ima jednačinu $y-1 = -(x-1)$. ▲

Sledeća teorema daje uopštenje teoreme 1 i stava 1 na slučaj implicitno definisane realne funkcije više promenljivih. I po formulaciji i po dokazu ona se ne razlikuje bitno od tih tvrđenja, pa odgovarajući dokaz nećemo navoditi.

Teorema 3.2.2

Neka je $A \subset \mathbf{R}^{m+1}$ otvoren skup, $(a_1,\dots,a_m,b) \in A$ i neka je:

1° *$F\colon A \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija (čiji argument ćemo označavati sa $(x_1,\dots,x_m,y)$),*

2° *$F(a_1,\dots,a_m,b) = 0$,*

3° *parcijalni izvod $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ postoji i neprekidan je na A,*

4° *$\dfrac{\partial F}{\partial y}(a_1,\dots,a_m,b) \neq 0$.*

Tada postoji okolina $W = U \times V$ tačke $(a_1,\dots,a_m,b)$ ($U = \prod_{i=1}^{m}(a_i-\alpha_i, a_i+\alpha_i)$, $V = (b-\beta, b+\beta)$) i jednoznačno određena neprekidna funkcija $f\colon U \to V$, takva da je $f(a_1,\dots,a_m) = b$ i $F\big(x_1,\dots,x_m,f(x_1,\dots,x_m)\big) = 0$ za $(x_1,\dots,x_m) \in U$.

Ako je još

5° *$F \in C^p(A)$ za neko $p \in \mathbf{N}$,*

tada važi $f \in C^p(U)$. Pri tom je za $i = 1,\dots,m$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y}(x, f(x)). \quad \blacksquare$$

Primer 3.2.2

Pretpostavimo da funkcija $F\colon A \to \mathbf{R}$, gde je $A \subset \mathbf{R}^3$ otvoren skup, u nekoj okolini tačke $(x,y,z) \in A$ zadovoljava uslove koji garantuju da jednačina $F(x,y,z) = 0$ jednoznačno definiše diferencijabilne funkcije

$$x = x(y,z), \quad y = y(z,x), \quad z = z(x,y).$$

Tada je

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) = -1.$$

Primetimo da ovaj rezultat pokazuje da se simboli za parcijalne izvode (za razliku od odgovarajućih simbola za obične izvode) ne mogu tretirati kao količnici „diferencijala", jer bi u protivnom prethodni proizvod morao biti jednak 1. ▲

3.3. IMPLICITNE FUNKCIJE SA VEKTORSKIM VREDNOSTIMA

Razmotrimo sada situaciju kada umesto jedne imamo više funkcija koje treba „implicitno" definisati pomoću više datih relacija, tačnije rečeno pomoću nekog sistema jednačina. Preciznije, pretpostavimo da su na nekom otvorenom skupu $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ definisane realne funkcije $F_1, \dots, F_n$, pri čemu ćemo njihov argument označavati sa $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, i posmatrajmo sistem jednačina

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Postavlja se pitanje pod kojim uslovima se taj sistem može „rešiti" po nepoznatim $y_1, \dots, y_n$, tj. pod kojim uslovima su „lokalno" definisane funkcije

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

koje zadovoljavaju sistem (1).

Da bismo teoremu koja daje odgovor na ovo pitanje jednostavnije formulisali i dokazali, uvedimo sledeće oznake: umesto $(x_1, \dots, x_m)$ pisaćemo x, a umesto $(y_1, \dots, y_n)$ samo y; onda će (x, y) biti oznaka za uređenu $(m+n)$-torku $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Takođe, F će biti oznaka za $(F_1, \dots, F_n)$, a f za $(f_1, \dots, f_n)$, pa će sistem (1) moći kratko da se zapiše kao

$$\text{(1')} \qquad F(x, y) = 0,$$

a traženo rešenje (2) kao

$$\text{(2')} \qquad y = f(x).$$

U samoj teoremi i stavu koji iza nje sledi biće potrebno da razmatramo sledeće matrice (odnosno linearne operatore):

$$d_y F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} (x,y), \quad d_x F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} (x,y),$$

koje ćemo zvati parcijalnim diferencijalima funkcije F. Primetimo da je matrica $d_y F(x, y)$ kvadratna, pa je definisana njena determinanta

$$\det d_y F(x,y) = \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$$

(jakobijan preslikavanja F, shvaćenog kao funkcije promenljivih $y_1, \dots, y_n$). Ako je ta determinanta u nekoj tački različita od nule, odgovarajuća matrica ima inverznu $[d_y F(x,y)]^{-1}$. Kao što ćemo odmah videti, ta invertibilnost matrice $d_y F(x, y)$ igra ulogu onog „odlučujućeg" uslova (koji je u teoremama 2.1 i 2.2 igrao uslov $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$), koji obezbeđuje egzistenciju implicitne funkcije.

Teorema 3.3.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ otvoren skup, $(a,b) \in A$ i neka je:

1° $F\colon A \to \mathbf{R}^n$ neprekidna funkcija,

2° $F(a,b) = 0$,

3° parcijalni diferencijal $d_y F$ je definisan na A i svi njegovi elementi $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ su neprekidni ($j,k = 1, \dots, n$),

4° $\det d_y F(a,b) \neq 0$, tj. matrica $d_y F(a,b)$ je invertibilna.

Tada postoji okolina $W = U \times V$ tačke (a,b) (gde je U okolina tačke a u $\mathbf{R}^m$, a V okolina tačke b u $\mathbf{R}^n$) i jednoznačno određena neprekidna funkcija $f\colon U \to V$, takva da je $f(a) = b$ i $F\big(x, f(x)\big) = 0$ za $x \in U$.

Dokaz.

Radi jednostavnosti pisanja pretpostavimo da je $a = 0 = (0, \dots, 0)$ i $b = 0 = (0, \dots, 0)$. Jasno je da to neće ograničiti opštost našeg izlaganja.

Pretpostavimo sada da je funkcija $y = f(x)$ koja zadovoljava uslove teoreme već nađena, tj. da za $y = f(x)$ važi

$$F(x,y) = 0.$$

Tada (i samo tada) će važiti

$$y - [d_y F(0,0)]^{-1} F(x,y) = y.$$

Na taj način, tražena vrednost y može se tretirati kao nepokretna tačka preslikavanja Φ_x koje je za fiksirano x dato sa

$$\text{(3)} \qquad \Phi_x(y) = y - [d_y F(0,0)]^{-1} F(x,y)$$

(pri tom se pretpostavlja da $(x,y) \in A$). Zato ćemo za dokaz egzistencije i jedinosti vektora y koristiti Banahovu teoremu o egzistenciji nepokretne tačke (teorema 9.3.2 iz M.A.I).

Primetimo najpre da je relacijom (3) preslikavanje Φ_x korektno definisano. Zaista, za $(x,y) \in A$ je $F(x,y) \in \mathbf{R}^n$; operator (matrica) $d_y F(0,0)$ je invertibilan, po pretpostavci teoreme, i preslikava $\mathbf{R}^n$ u $\mathbf{R}^n$; zato i $[d_y F(0,0)]^{-1}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, pa je kompozicija $[d_y F(0,0)]^{-1} F(x,y)$ definisana i njene vrednosti su u $\mathbf{R}^n$. Tako je i $\Phi_x(y)$ definisano ako je $(x,y) \in A$ i pripada $\mathbf{R}^n$.

Da bismo mogli da primenimo Banahovu teoremu, treba da pravilno odaberemo (kompletan) metrički prostor koji će operator Φ_x prevoditi u samog sebe i na kome će on biti kontrakcija.

Primetimo najpre da je za svako fiksirano x preslikavanje Φ_x diferencijabilno u svakoj tački y za koju je $(x,y) \in A$ i važi

$$\begin{aligned} d\Phi_x(y) &= E - [d_y F(0,0)]^{-1} d_y F(x,y) \\ &= [d_y F(0,0)]^{-1} \big(d_y F(0,0) - d_y F(x,y)\big), \end{aligned}$$

gde je E jedinična matrica tipa $n\times n$ (tj. jedinični operator prostora $\mathbf{R}^n$). Označimo sa C normu operatora $[d_yF(0,0)]^{-1}$. Kako je, po pretpostavci, operator $d_yF(x,y)$ neprekidan u tački $(0,0)$, to je za (x,y) iz neke okoline $W' = U'\times V'$ te tačke ispunjeno

$$\|d_yF(0,0) - d_yF(x,y)\| < \frac{1}{2C},$$

a samim tim i

$$\|d\Phi_x(y)\| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Dalje ćemo pretpostavljati da je uslov (4) ispunjen.

Prema teoremi o srednjoj vrednosti (teorema 2.4.2), za fiksirano $x \in U'$ i proizvoljne $y_1, y_2 \in V'$ važi

$$\|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\| \leqslant \|y_1 - y_2\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|d\Phi_x(y_1 + t(y_2 - y_1))\| \tag{5}$$

$$< \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|.$$

Ovde smo koristili činjenicu da se okolina V' uvek može izabrati tako da bude konveksna (na primer, kugla), pa tada za $y_1, y_2 \in V'$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$ takođe važi $y_1 + t(y_2 - y_1) \in V'$.

Fiksirajmo sada proizvoljan broj $\varepsilon > 0$, takav da je zatvorena kugla $V = K[0,\varepsilon]$ prostora $\mathbf{R}^n$ sadržana u V'. Dokažimo da postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da je otvorena kugla $U = K(0,\delta)$ prostora $\mathbf{R}^n$ sadržana u U' i da za svako $x \in U$ preslikavanje Φ_x prevodi kuglu V u samu sebe.

U tom cilju, koristeći neprekidnost funkcije F u tački $(0,0)$ i činjenicu da je $F(0,0) = 0$, odaberimo pozitivan broj δ tako da $U = K(0,\delta) \subset U'$ i da za $x \in U$ važi

$$\|\Phi_x(0)\| = \|[d_yF(0,0)]^{-1}F(x,0)\| \leqslant \|d_yF(0,0)^{-1}\|\,\|F(x,0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatim, za $x \in U$ i $y \in V$, koristeći ocenu (5), dobijamo

$$\|\Phi_x(y)\| \leqslant \|\Phi_x(y) - \Phi_x(0)\| + \|\Phi_x(0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

što i znači da $\Phi_x\colon V \to V$ za $x \in U$.

Kugla V je zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora $\mathbf{R}^n$, pa je i sama jedan kompletan metrički prostor. Na osnovu ocene (5) preslikavanje Φ_x je, za svako $x \in U$, kontrakcija tog prostora. Prema Banahovoj teoremi zaključujemo da za svako $x \in U$ postoji i jedinstveno je određena tačka $y = f(x) \in V$, koja je nepokretna za preslikavanje Φ_x, tj. takva je da važi

$$f(x) = \Phi_x f(x) = f(x) - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x,f(x)),$$

odnosno $F\big(x,f(x)\big) = 0$ za $x \in U$. Znači, funkcija $y = f(x)$ zadovoljava jednačinu $F(x,y) = 0$ za $(x,y) \in W = U\times V$. Za nju je $f(0) = 0$ jer je

$$\Phi_0(0) = 0 - [d_yF(0,0)]^{-1}F(0,0) = 0,$$

a nepokretna tačka preslikavanja Φ_0 je jedinstveno određena.

Dokažimo još da je funkcija f neprekidna. Zaista, za dato ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, možemo uzeti δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, tako da za svako $x \in K(0,\delta_1) \subset U$ postoji jedinstveno $y \in K(0,\varepsilon_1)$ za koje je $F(x,y) = 0$, pri čemu je baš $y = f(x)$. No, tada je

$$\|f(x) - f(0)\| = \|f(x) - 0\| = \|y\| < \varepsilon_1$$

za $\|x\| < \delta_1$, što i znači da je f neprekidna u nuli. Međutim, uslovi teoreme su ispunjeni za svaku tačku okoline $W = U\times V$, pa je funkcija $f\colon U \to V$ neprekidna.

Time je teorema u potpunosti dokazana. ■

Kao i kod slučaja funkcije sa realnim vrednostima, dopunimo ovu teoremu stavom koji bliže opisuje neka svojstva implicitne funkcije.

Stav 3.3.1

Neka, pored uslova 1°, 2°, 3° i 4° prethodne teoreme, funkcija F zadovoljava i uslov

5° parcijalni diferencijal d_xF je definisan na A i svi njegovi elementi $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ su neprekidni ($i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$),

tj. neka $F \in C^1(A,\mathbf{R}^n)$. Tada je funkcija f, opisana u toj teoremi, neprekidno diferencijabilna, tj. $f \in C^1(U,\mathbf{R}^n)$ i za svako $x \in U$ važi

$$df(x) = -\big[d_yF\big(x,f(x)\big)\big]^{-1}d_xF\big(x,f(x)\big). \tag{6}$$

Ako je $F \in C^p(A,\mathbf{R}^n)$ za neko $p \in \mathbf{N}$, tada je $f \in C^p(U,\mathbf{R}^n)$.

Dokaz.

Dokazaćemo samo diferencijabilnost funkcije f i formulu (6). Kao i kod dokaza neprekidnosti funkcije f, nije ograničenje opštosti ako to uradimo samo za $x = a$. Takođe, opet ćemo pretpostaviti da je $a = 0$ i $b = 0$.

Označimo sa L linearni operator

$$L = -[d_yF(0,0)]^{-1}d_xF(0,0).$$

Primetimo da je on dobro definisan: kao što smo ranije pominjali, $[d_yF(0,0)]^{-1}$ je matrica tipa $n\times n$, a $d_xF(0,0)$ je matrica tipa $n\times m$; znači, njihov proizvod (u naznačenom poretku) je matrica tipa $n\times m$ i preslikava m-dimenzione vektore u $\mathbf{R}^n$. Dokažimo da je zaista L diferencijal funkcije f u tački 0. Za to je dovoljno dokazati da je

$$f(x) - f(0) = Lx + o(x) \qquad (x \to 0).$$

Stavljajući $y = f(x)$ i uzimajući u obzir da je $F(x,y) = F(0,0) = f(0) = 0$, na osnovu diferencijabilnosti funkcije F u tački $(0,0)$, imamo

$$0 = F(x,y) - F(0,0) = d_xF(0,0)x + d_yF(0,0)y + o(\|x\| + \|y\|) \qquad (\|x\| \to 0)$$

(primetimo da $\|x\| \to 0$ povlači $\|y\| \to 0$ zbog neprekidnosti funkcije $y = f(x)$ u nuli). Odavde je

$$[d_yF(0,0)]^{-1}d_xF(0,0)x + y = [d_yF(0,0)]^{-1}o(\|x\| + \|y\|) \qquad (\|x\| \to 0),$$

tj.

$$\|y - Lx\| \leqslant \|[d_yF(0,0)]^{-1}\| \cdot o(\|x\| + \|y\|) \qquad (\|x\| \to 0). \tag{7}$$

Pretpostavimo da je $\|x\|$, a sa njim i $\|y\|$, dovoljno malo, tako da je desna strana relacije (7) manja od $\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)$. Tada iz (7) dobijamo

$$\|y\| - \|L\| \cdot \|x\| \leqslant \|y - Lx\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|,$$

odakle je

$$\frac{1}{2}\|y\| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \|L\|\right)\|x\|,$$

tj. $\|y\| \leqslant C\|x\|$ za neko $C > 0$. Ako sada tu ocenu ponovo zamenimo u relaciju (7), dobijamo

$$\|y - Lx\| \leqslant \|d_yF(0,0)\|^{-1} \cdot o((C+1)\|x\|) = o(\|x\|) \qquad (\|x\| \to 0),$$

što i znači da je

$$f(x) - f(0) - Lx = y - Lx = o(x) \qquad (x \to 0).$$

Time je dokazano da je operator L diferencijal funkcije f u tački 0. ■

Napišimo u razvijenom obliku izraz za diferencijal funkcije f u tački x,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

pri čemu su svi izvodi funkcije F računati u tački $(x, y) = (x, f(x))$.

Primer 3.3.1

Pretpostavimo da je dat sistem od n jednačina sa $2n$ promenljivih

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

tj. neka je data funkcija $F\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ i jednačina $F(x, y) = 0$. Pretpostavimo, dalje, da su „lokalno" (dakle, u smislu prethodne teoreme i stava) ispunjeni uslovi za egzistenciju diferencijabilne funkcije $y = f(x)$, takve da je $F(x, f(x)) = 0$ u okolini neke fiksirane tačke a. Izračunajmo jakobijan funkcije f u toj tački, tj. determinantu $\det df(a) = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a)$ diferencijala funkcije f u tački a.

Na osnovu formule (6) imamo

$$\det df(a) = \det\{-[d_yF(a, f(a))]^{-1} d_xF(a, f(a))\}.$$

Kao što znamo, determinanta proizvoda dveju matrica je proizvod njihovih determinanata. Što se množenja sa (-1) tiče, on menja matricu tako što menja znak *svim*

njenim elementima, što podrazumeva množenje njene determinante sa $(-1)^n$ (n je broj vrsta, odnosno kolona, te matrice). Najzad, determinanta inverzne matrice je recipročna vrednost determinante date matrice, pa dobijamo

$$\det df(a) = (-1)^n \frac{\det d_xF(a, f(a))}{\det d_yF(a, f(a))},$$

tj.

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) = (-1)^n \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a, f(a)) \Big/ \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}(a, f(a)). \quad ▲$$

3.4. TEOREMA O INVERZNOJ FUNKCIJI

Kao prvu primenu dokazane teoreme o implicitnoj funkciji navešćemo teoremu koja daje uslove za egzistenciju i diferencijabilnost inverzne funkcije date vektorske funkcije više promenljivih. Kao i sama teorema o implicitnoj funkciji, i ovo tvrđenje će biti „lokalnog" karaktera, tj. biće vezano za neke okoline posmatranih tačaka u domenu i kodomenu.

Razmatraćemo funkciju $f\colon A \to \mathbf{R}^m$, gde je A otvoren podskup prostora $\mathbf{R}^m$, zadatu sistemom jednačina

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_m). \end{cases} \tag{1}$$

Grubo govoreći, teorema o inverznoj funkciji kaže da je funkcija f lokalno invertibilna (tj. da se sistem (1) može lokalno rešiti po promenljivim $x_1, \ldots, x_m$) ako je invertibilan njen diferencijal df u datoj tački $a \in A$, tj. ako postoji inverzna matrica $[df(a)]^{-1}$. Preciznije, važi

Teorema 3.4.1

Neka je $A \subset \mathbf{R}^m$ otvoren skup, $a \in A$ i $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ neprekidno diferencijabilna funkcija, takva da je $\det df(a) \neq 0$. Tada postoje okoline U tačke a i V tačke $b = f(a)$, takve da je restrikcija $f\colon U \to V$ bijekcija. Pri tom je inverzna funkcija $f^{-1}\colon V \to U$ neprekidno diferencijabilna i važi

$$df^{-1}(y) = [df(x)]^{-1} \tag{2}$$

za sve $x \in U$ i $y = f(x) \in V$.

Dokaz.

Uvedimo funkciju $F\colon A \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ pomoću $F(x,y) = f(x) - y$ za $x \in A$, $y \in \mathbf{R}^m$. Proverimo da ta funkcija zadovoljava uslove teoreme 3.1 u tački $(a,b) \in \mathbf{R}^{2m}$ da bi se jednačina $F(x,y) = 0$ mogla „lokalno rešiti" po x.

Kao prvo, zbog $b = f(a)$ je $F(a,b) = 0$. Zatim, parcijalni diferencijal d_xF je definisan i neprekidan na $A \times \mathbf{R}^m$, jer je

$$d_xF(x,y) = df(x).$$

Najzad, po pretpostavci je $d_xF(a,b) = df(a)$ invertibilna matrica. Dakle, na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji i stava 3.1, postoje okolina $W = U_1 \times V$ tačke (a,b) i neprekidno diferencijabilna funkcija $g\colon V \to U_1$, takvi da je $g(b) = a$ i $F(g(y),y) = 0$, tj. $f(g(y)) = y$ za sve $y \in V$. Ako još stavimo $U = g(V)$, funkcije f i g će biti uzajamno inverzne između U i V, tj. biće $g = f^{-1}$. Čitaocu prepuštamo proveru činjenice da je U okolina tačke a.

Na osnovu stava 3.1, za sve $x \in U$ i $y = f(x) \in V$, važi

$$dg(y) = -[d_xF(x,y)]^{-1}d_yF(x,y) = -[df(x)]^{-1}(-E) = [df(x)]^{-1},$$

gde je sa E označena jedinična matrica tipa $m \times m$. ■

Za funkciju f koja ima svojstva opisana u ovoj teoremi, dakle koja je bijektivno preslikavanje otvorenih podskupova prostora $\mathbf{R}^m$, pri čemu su i f i f^{-1} diferencijabilne funkcije, kaže se da je *difeomorfizam*. Ako su, pored toga, funkcije f i f^{-1} klase C^k za neko $k \in \mathbf{N}$ (tj. ako su k puta neprekidno diferencijabilne), kaže se da je f C^k-difeomorfizam ili difeomorfizam glatkosti k. Na osnovu stava 3.1, kao dopunu prethodne teoreme, možemo izvesti sledeće tvrđenje.

Stav 3.4.1

Ako je, pored uslova u prethodnoj teoremi, $f \in C^k(A,\mathbf{R}^m)$, tada se okoline U i V mogu tako izabrati da je f C^k-difeomorfizam između tih okolina. ■

Primer 3.4.1

Neka je dato preslikavanje $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sa $f(x,y) = (u,v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = (x+y)^2$. Tada je

$$df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix},$$

pa je $\det df(x,y) = 4(x+y)(x-y)$. Znači, uslov za lokalnu invertibilnost ove funkcije biće ispunjen u onim tačkama (x,y) za koje je $|x| \neq |y|$. Svaka od odgovarajućih tačaka (u,v) ima okolinu u kojoj je definisana inverzna funkcija f^{-1}, pri čemu je

$$df^{-1}(x^2+y^2,(x+y)^2) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(x+y)(x-y)} \begin{bmatrix} x+y & -y \\ -(x+y) & x \end{bmatrix}. \quad ▲$$

3.5. ZAVISNOST FUNKCIJA

Definicija 3.5.1

Za sistem diferencijabilnih realnih funkcija

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\dots,x_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1,\dots,x_m), \end{cases}$$

definisanih u nekoj okolini U tačke $a \in \mathbf{R}^m$, kažemo da je *funkcionalno zavisan* u toj okolini ako postoji diferencijabilna realna funkcija F, definisana u nekoj okolini V tačke $b = (f_1(a),\dots,f_n(a)) \in \mathbf{R}^n$, koja nije identički jednaka nuli u V, takva da je

$$F\big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big) = 0$$

za sve $x = (x_1,\dots,x_m) \in U$. U suprotnom, tj. ako takva funkcija ne postoji, kažemo da su funkcije (1) *funkcionalno nezavisne.*

Pojam *linearne zavisnosti* funkcija, poznat iz linearne algebre, očigledno je specijalan u odnosu na upravo uvedeni pojam funkcionalne zavisnosti — linearna zavisnost povlači funkcionalnu, ali obrnuto ne mora da važi.

Primer 3.5.1

Posmatrajmo funkcije

$$y_1 = x_1 + \dots + x_m, \quad y_2 = x_1^2 + \dots + x_m^2, \quad y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{m-1}x_m,$$

definisane na $\mathbf{R}^m$. Očigledno za sve $(x_1,\dots,x_m) \in \mathbf{R}^m$ važi $y_1^2 - y_2 - 2y_3 = 0$, pa su ove funkcije funkcionalno (ali ne i linearno) zavisne. ▲

Zavisnost, odnosno nezavisnost, funkcija nije uvek lako proveriti. U linearnoj algebri znamo da se to radi ispitivanjem ranga matrice formirane od koeficijenata odgovarajućih linearnih funkcija. Analogan postupak može se sprovesti i za ispitivanje funkcionalne zavisnosti — naravno, u lokalnom smislu — posmatranjem Jakobijeve matrice funkcije $y = f(x)$, date sa

$$(2) \qquad y = (y_1,\dots,y_n) = \big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big).$$

Teorema 3.5.1

Neka je (1) sistem glatkih funkcija, definisanih u okolini U tačke $a \in \mathbf{R}^m$, takav da Jakobijeva matrica

$$df(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}$$

funkcije (2) ima rang jednak k za svako $x \in U$. Tada:

1° *ako je* $k = n$, *sistem* (1) *je funkcionalno nezavisan u okolini* U;

2° *ako je* $k < n$, *postoji okolina* U' *tačke* a *i* k *funkcionalno nezavisnih funkcija datog sistema — neka su to funkcije* $f_1, \dots, f_k$ *— tako da za neke funkcije* $g_i(y_1, \dots, y_k)$, *definisane i glatke u okolini tačke* $\big(f_1(a), \dots, f_k(a)\big)$, *za* $x \in U'$ *važi*

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = g_i\big(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)\big), \quad i = k+1, \dots, n. \tag{3}$$

Dokaz.

1° Neka je $\operatorname{rang} df(x) = k = n$ i, samim tim, $n \leqslant m$. Ne ograničavajući opštost, možemo pretpostaviti da je

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

za sve $x \in U$. Može se dokazati (v. npr. [25]) da je tada slika $f(U)$ okolina tačke $b = f(a)$. Pretpostavimo, suprotno od onog što dokazujemo, da postoji diferencijabilna funkcija $F(y_1, \dots, y_n)$ koja nije identički jednaka nuli u toj okolini tačke b, takva da je

$$F\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) = 0 \quad \text{za } x \in U.$$

Po pravilu diferenciranja složene funkcije nalazimo

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0,$$

za $i = 1, \dots, n$. No, to znači da su vrste determinante (4) linearno zavisne (koeficijenti $\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ nisu svi jednaki nuli, jer F nije identički jednaka konstanti), pa je ta determinanta jednaka nuli. Ova kontradikcija dokazuje prvi deo teoreme.

2° Neka je $\operatorname{rang} df(x) = k < n$ i neka je, na primer, različit od nule minor reda k te matrice koji stoji u njenom gornjem levom uglu,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_1, \dots, x_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

za sve $x \in U$, dok su svi minori reda $k+1$ jednaki nuli. Tada nezavisnost funkcija $f_1, \dots, f_k$ sledi iz dokazanog dela teoreme, pa je ostalo da se dokaže da se svaka od preostalih funkcija $f_{k+1}, \dots, f_n$ može izraziti u obliku (3). Naravno, dovoljno je to dokazati za jednu od tih funkcija, na primer, za funkciju f_{k+1}.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$f_i(x_1, \dots, x_m) - y_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, k). \tag{6}$$

Zbog pretpostavke (5), na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji, taj sistem se može „lokalno“ rešiti po promenljivim $x_1, \dots, x_k$, tj. postoje glatke funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, tako da u odgovarajućim okolinama važi

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \qquad (i = 1, \dots, k). \tag{7}$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= f_{k+1}\big(\varphi_1(\cdots), \dots, \varphi_k(\cdots), x_{k+1}, \dots, x_m\big) \\ &= \Phi_{k+1}(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Ostalo je da se dokaže da funkcija Φ_{k+1} ne zavisi (u pogodno odabranoj okolini) neposredno od promenljivih $x_{k+1}, \dots, x_m$, a za to je dovoljno dokazati da su parcijalni izvodi $\dfrac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_r}$ jednaki nuli u toj okolini (za $r = k+1, \dots, m$). Učinićemo to za $r = k+1$ — za ostale vrednosti r dokaz je analogan.

Diferencirajmo po x_{k+1} relacije (6) i uzimajući u obzir (7) dobijamo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+1}} = 0 \qquad (i = 1, \dots, k). \tag{8}$$

S druge strane je

$$\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}} = \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}. \tag{9}$$

Posmatrajmo sada determinantu sistema od $k+1$ jednačine (8), (9),

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \end{vmatrix}.$$

Ta determinanta je jedan od minora reda $k+1$ matrice $df(x)$, pa je po pretpostavci jednaka nuli (u datoj okolini U). Neka je Δ_i algebarski kofaktor koji odgovara i-tom elementu poslednje kolone determinante Δ $(i = 1, \dots, k+1)$. Pomnožimo i-tu jednačinu sistema (8), (9) sa Δ_i i saberimo tako dobijene jednačine. Dobijamo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta_1 + \dots + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1}\Delta_{k+1}\right) + \dots \\ &\qquad + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\Delta_1 + \dots + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k}\Delta_{k+1}\right) \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}\Delta_1 + \dots + \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}\right) = \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}. \end{aligned}$$

Na osnovu poznate teoreme linearne algebre, poslednja jednakost se svodi na

$$0 = \Delta = \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}.$$

Međutim, Δ_{k+1} je upravo minor (5) koji nije jednak nuli, pa zaključujemo da je $\dfrac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}} = 0$, čime je dokaz teoreme završen. ∎

PRIMER 3.5.2

Posmatrajmo ponovo funkcije iz primera 1. Matrica koja nas interesuje je oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_m \\ \sum_{i=1}^{m} x_i - x_1 & \sum_{i=1}^{m} x_i - x_2 & \dots & \sum_{i=1}^{m} x_i - x_m \end{bmatrix}.$$

Lako je proveriti da su svi minori trećeg reda te matrice identički jednaki nuli, dok je u svakoj tački $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, u kojoj nisu sve koordinate $x_1, \dots, x_m$ jednake među sobom, bar jedan od minora drugog reda različit od nule. Dakle, naš sistem je funkcionalno zavisan (što smo eksplicitno proverili već u primeru 1), dok su u nekoj okolini svake od opisanih tačaka funkcije y_1 i y_2 nezavisne, a funkcija y_3 se može preko njih izraziti. ▲

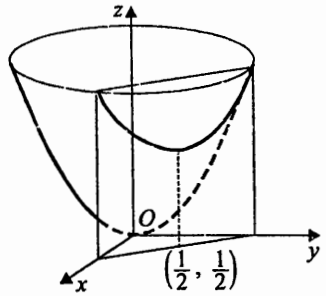
Pomenimo na kraju da smo u celom odeljku pretpostavljali da matrica $df(x)$ zadržava konstantan rang za sve $x \in U$. Naravno, to ne mora uvek biti slučaj, što znači da može da se dogodi da u nekim delovima oblasti definisanosti između funkcija f_i može da postoji jedna, a u drugim druga zavisnost (ili da one tu budu nezavisne). Odgovarajući primer navodimo u zadatku 12.

3.6. USLOVNI EKSTREMUMI

U odeljku 2.6 upoznali smo se sa metodama određivanja ekstremnih vrednosti realnih funkcija više promenljivih koje su u dobroj meri analogne onome što nam je poznato za funkcije jedne promenljive. Kod funkcija više promenljivih, međutim, često se srećemo i sa jednom novom situacijom — da kod određivanja ekstremuma promenljive ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije, već su one vezane nekim dodatnim relacijama. Ilustrujmo to na jednom primeru.

PRIMER 3.6.1

Posmatrajmo funkciju $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, datu sa $f(x,y) = x^2 + y^2$. Odredimo najmanju vrednost te funkcije, pod uslovom da su promenljive x i y vezane relacijom $x + y = 1$.



Sl. 3.6.1

Iz date veze sledi $y = 1 - x$, pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x,y) = f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Minimalna vrednost dobijenog izraza se lako određuje — ona iznosi $1/2$ i postignuta je za $x = 1/2$ (pa i $y = 1/2$). Primetimo da sama funkcija f u svakoj okolini tačke $(1/2, 1/2)$ ima i manjih vrednosti od $1/2$; inače njena najmanja vrednost na $\mathbf{R}^2$ je 0. ▲

Zadaci ovakvog tipa često se sreću prilikom ispitivanja ponašanja funkcije više promenljivih na rubu njihovog domena, što smo takođe već pominjali u odeljku 2.6.

Formulišimo sada u opštem obliku problem određivanja uslovnog ekstremuma.

Neka je data funkcija $f\colon A \to \mathbf{R}$, definisana na otvorenom skupu $A \subset \mathbf{R}^m$. Neka su, pored toga, date funkcije $\varphi_i\colon A \to \mathbf{R}$, za $i = 1, \dots, s$, gde je s fiksiran prirodan broj manji od m. Označimo sa B skup

$$B = \{\, x \in A \mid \varphi_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, s \,\}.$$

Kazaćemo da je skup B *određen uslovima* $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_s(x) = 0$.

DEFINICIJA 3.6.1

Kažemo da funkcija f u tački $a \in B$ ima *lokalni minimum pri uslovima* $\varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_s(x) = 0$ ako postoji broj $r > 0$, takav da je za svako $x \in B$ za koje je $d(x,a) < r$ ispunjeno $f(x) \geqslant f(a)$:

$$(\exists r > 0)(\forall x \in B \cap K(a,r))\ f(x) \geqslant f(a).$$

Slično se definišu strogi lokalni minimum, kao i (strogi) lokalni maksimum pri datim uslovima.

U navedenom primeru imali smo $s = 1$ i $\varphi_1(x,y) = x + y - 1$, pa je skup B bio odgovarajuća prava u $\mathbf{R}^2$ (sl. 1).

Prilikom određivanja uslovnih ekstremuma uvek ćemo pretpostavljati da su funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ glatke i da matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

u okolini „sumnjive" tačke ima rang jednak s. Naime, ako to ne bi bio slučaj, na osnovu teoreme 5.1, bar jedna od funkcija φ_i mogla bi se „lokalno" izraziti preko ostalih, pa bi odgovarajući uslov $\varphi_i(x) = 0$ bio „suvišan" (mogao bi se izostaviti iz spiska uslova, bez promene odgovarajućeg skupa B).

Uz navedene pretpostavke ispunjeni su uslovi teoreme o implicitnoj funkciji, pa se nekih s od promenljivih $x_1, \dots, x_m$ mogu iz datog sistema $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, s$, lokalno izraziti pomoću ostalih. Na primer, to mogu biti $x_1, \dots, x_s$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(x_{s+1}, \dots, x_m) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_s &= \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

u nekoj okoloni date tačke. Zamenom ovih izraza u izraz za funkciju f dobija se

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= f\big(\psi(x_{s+1}, \dots, x_m), \dots, \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_m), x_{s+1}, \dots, x_m\big) \\ &= g(x_{s+1}, \dots, x_m), \end{aligned}$$

pa se problem određivanja uslovnog ekstremuma svodi na određivanje običnog lokalnog ekstremuma funkcije g od $m-s$ promenljivih na njenom domenu. U primeru 1 smo upravo tako i postupili: vezu $x+y=1$ smo „rešili po y": $y=1-x$, pa smo zamenom dobili $f(x,y)=f(x,1-x)=2x^2-2x+1=g(x)$, $x\in\mathbf{R}$, i dalji postupak nastavili sa funkcijom g jedne promenljive.

Opisani metod određivanja uslovnog ekstremuma ima dva krupna nedostatka: prvo, bez obzira na principijelnu mogućnost rešavanja sistema $\varphi_i(x)=0$, $i=1,\dots,s$, koji garantuje teorema o implicitnoj funkciji, ta rešenja se po pravilu ne mogu eksplicitno dobiti; drugo, ovakvim postupkom se u određenom smislu narušava ravnopravnost među promenljivim $x_1,\dots,x_m$ (neke ostaju nezavisno promenljive, a druge se preko njih izražavaju), što u nekim slučajevima dovodi do komplikovanja daljih izvođenja. Oba ova nedostatka otklanjaju se primenom tzv. *Lagranžovog metoda multiplikatora* koji ćemo opisati u nastavku ovog odeljka. Najpre ćemo izvesti neophodne, a zatim i dovoljne uslove za egzistenciju uslovnog ekstremuma Lagranžovim metodom.

Teorema 3.6.1

Neka je $A\subset\mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\in C^1(A)$ i $\varphi_i\in C^1(A)$ za $i=1,\dots,s$, gde je $s<m$, pri čemu matrica (1) u nekoj okolini tačke $a\in A$ ima rang jednak s. Ako funkcija f u tački a ima lokalni ekstremum pri uslovima $\varphi_1(x)=\dots=\varphi_s(x)=0$, onda postoje realni brojevi $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, takvi da je a stacionarna tačka funkcije

$$F=f+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_s\varphi_s.$$

Dokaz.

Neka je, na primer,

$$(1')\qquad \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_s)}{D(x_1,\dots,x_s)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}(a)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_s}(a)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Tada su jednoznačno određeni realni brojevi $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, takvi da je

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a)+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}(a)+\dots+\lambda_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\nu}(a)=0,\quad \nu=1,\dots,s.$$

Za funkciju $F=f+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_s\varphi_s$ je onda ispunjeno $\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu}(a)=0$ za $\nu=1,\dots,s$; ostaje da se pokaže da je i $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(a)=0$ za $j=s+1,\dots,m$.

Prema teoremi o implicitnoj funkciji, za sistem

$$\varphi_i(x_1,\dots,x_m)=0,\quad i=1,\dots,s,\quad (x_1,\dots,x_m)\in A,$$

postoji lokalno rešenje po promenljivim $x_1,\dots,x_s$,

$$x_i=\psi_i(x_{s+1},\dots,x_m),\quad i=1,\dots,s,$$

pri čemu $(x_{s+1},\dots,x_m)$ pripada nekoj okolini U tačke $(a_{s+1},\dots,a_m)$ (gde je $a=(a_1,\dots,a_m)$), a ψ_i su neprekidno diferencijabilne funkcije u toj okolini. Po pravilu diferenciranja složene funkcije, u toj okolini je

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_j}+\dots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}\frac{\partial\psi_s}{\partial x_j}=0,\quad j=s+1,\dots,m,\quad i=1,\dots,s.$$

Na skupu U funkcija

$$f(x_1,\dots,x_m)=f\big(\psi_1(x_{s+1},\dots,x_m),\dots,\psi_s(x_{s+1},\dots,x_m),x_{s+1},\dots,x_m\big)$$

ima lokalni ekstremum u tački $(a_{s+1},\dots,a_m)$. Zato je u toj tački

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_j}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial\psi_s}{\partial x_j}=0,\quad j=s+1,\dots,m.$$

Kombinujući jednakosti (2) i (3), iz poslednje jednakosti dobijamo da je, za $j=s+1,\dots,m$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j}(a)&=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}(a)+\dots+\lambda_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_j}(a)\\ &=-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}+\lambda_1\Big(-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\Big)+\dots+\lambda_s\Big(-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\Big)\\ &=-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}+\dots+\lambda_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\nu}\Big)=-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\cdot 0=0,\end{aligned}$$

pri čemu su svi izvodi računati u odgovarajućim tačkama. Dakle, tačka a je stacionarna za funkciju F, što je i trebalo dokazati. ■

Prilikom praktičnog određivanja potencijalnih tačaka uslovnog ekstremuma treba, dakle, naći stacionarne tačke Lagranžove funkcije F, tj. rešenja sledećeg sistema od $m+s$ jednačina po nepoznatim $x_1,\dots,x_m,\lambda_1,\dots,\lambda_s$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_s\dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\dots,m,\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda_i}\equiv\varphi_i=0,\quad i=1,\dots,s.\end{cases}$$

Za proveru da li su rešenja tog sistema zaista tačke traženog uslovnog ekstremuma funkcije f koristimo sledeću teoremu.

Teorema 3.6.2

Neka, uz oznake i pretpostavke prethodne teoreme, važi:

1° $f\in C^2(A)$, $\varphi_i\in C^2(A)$, $i=1,\dots,s$;

2° $a\in B$ je stacionarna tačka funkcije $F=f+\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_s\varphi_s$ za neki izbor realnih brojeva $\lambda_1,\dots,\lambda_s$;

3° važi uslov (1').

Za $(h_{s+1},\dots,h_m)\in\mathbf{R}^{m-s}$ *označimo sa*

$$\Phi(h_{s+1},\dots,h_m)=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j$$

kvadratnu formu promenljivih $h_{s+1},\dots,h_m$, *gde su* $h_1,\dots,h_s$ *određeni sistemom jednačina*

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}(a)h_1+\dots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_m}(a)h_m=0,\quad i=1,\dots,s. \tag{4}$$

Ako je forma Φ *pozitivno (negativno) definitna, tada je* a *tačka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcije* f *pri uslovima* $\varphi_1=\dots=\varphi_s=0$.

Dokaz.

Neka je $h\in\mathbf{R}^m$ takvo da $a+h\in B$ (tj. $\varphi_i(a)=\varphi_i(a+h)=0$ za $i=1,\dots,s$) i $[a,a+h]\subset A$. Na osnovu Tejlorove formule važi:

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)&=F(a+h)-F(a)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j+o(\|h\|^2)\qquad(h\to0).\end{aligned}$$

Jasno je da zamena promenljivih $h_1,\dots,h_s$, koje se iz sistema (4) izražavaju linearno preko promenljivih $h_{s+1},\dots,h_m$, transformiše poslednju jednakost u

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}\Phi(h_{s+1},\dots,h_m)+o(\|h\|^2)\qquad(h\to0),$$

pa tvrđenje teoreme sledi neposredno. ■

Primer 3.6.2

Nađimo lokalne ekstremume funkcije $f\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, $f(x,y,z)=xyz$, pri uslovu $x^2+y^2+z^2=3$.

Formirajmo Lagranžovu funkciju

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-3).$$

Iz uslova

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda x=0,\quad\frac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda y=0,\quad\frac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda z=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=3$$

dobijamo 14 stacionarnih tačaka funkcije F:

$$(1,1,1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1),\ (-1,-1,1)\qquad(\lambda=-1/2), \tag{5}$$
$$(-1,-1,-1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,-1)\qquad(\lambda=1/2), \tag{6}$$
$$(\pm\sqrt{3},0,0),\ (0,\pm\sqrt{3},0),\ (0,0,\pm\sqrt{3})\qquad(\lambda=0). \tag{7}$$

Kvadratna forma za ispitivanje karaktera tih stacionarnih tačaka ima oblik

$$\Phi=2\lambda(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+2zh_1h_2+2yh_1h_3+2xh_2h_3,$$

pri čemu λ, x, y, z imaju odgovarajuće vrednosti. Na primer, u tački $(1,1,1)$ ta forma postaje

$$\Phi=-h_1^2-h_2^2-h_3^2+2h_1h_2+2h_1h_3+2h_2h_3. \tag{8}$$

Pri tom su priraštaji h_1, h_2, h_3 vezani uslovom

$$h_3=-(h_1+h_2), \tag{9}$$

pa zamenjujući u izraz za Φ dobijamo

$$\Phi=-h_1^2-h_2^2-(h_1+h_2)^2+2h_1h_2-2(h_1+h_2)^2=-(h_1-h_2)^2-3(h_1+h_2)^2<0$$

za sve $(h_1,h_2)\neq(0,0)$. Na taj način, u tački $(1,1,1)$ funkcija f ima lokalni uslovni maksimum.

Na sličan način se dokazuje da funkcija f ima takođe lokalni uslovni maksimum (jednak 1) u svakoj od tačaka (5), a lokalni uslovni minimum (jednak -1) u svakoj od tačaka (6). U tačkama (7) nema ekstremuma.

Primetimo da forma (8) bez uslova (9) nije definitna. ▲

Kao što smo pomenuli u odeljku 2.6, ispitivanje uslovnog ekstremuma je često potrebno prilikom određivanja apsolutnog ekstremuma neke funkcije više promenljivih, definisane u nekoj ograničenoj zatvorenoj oblasti. Pri tom, u takvim slučajevima obično nema potrebe za ispitivanjem karaktera dobijenih stacionarnih tačaka. Navedimo jedan takav primer.

Primer 3.6.3

Nađimo najveću i najmanju vrednost funkcije $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ na skupu $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant25\}$.

Kako se parcijalni izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne anuliraju istovremeno u unutrašnjosti skupa A, to se tražena maksimalna i minimalna vrednost funkcije f (koje postoje po Vajerštrasovoj teoremi) dostižu na krugu $x^2+y^2=25$. Dakle, treba odrediti ekstremume funkcije f pri tom uslovu. Za Lagranžovu funkciju

$$F=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

je

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-12+2\lambda x=0,\quad\frac{\partial F}{\partial y}=2y+16+2\lambda y=0,\quad\frac{\partial F}{\partial\lambda}=x^2+y^2-25=0$$

za $x=3$, $y=-4$, $\lambda=1$ ili $x=-3$, $y=4$, $\lambda=-3$. Kako je $f(3,-4)=-75$, $f(-3,4)=125$, to je traženi maksimum jednak 125, a minimum -75. ▲

ZADACI

1. Formulisati uslove, dovoljne da važi formula primera 2.2. Kako glasi odgovarajuća formula u slučaju funkcije F od m promenljivih?

2. U ravni je data kriva jednačinom $F(x,y)=0$, gde $F\in C^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$. Ako u tački (a,b) te krive nisu oba izvoda $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ jednaka nuli, napisati jednačinu tangente krive u toj tački. Dokazati da ako je (a,b) prevojna tačka te krive, onda važi

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right)(a,b)=0.$$

3. Dokazati teoremu 3.1 o implicitnoj funkciji indukcijom po n, koristeći teoremu 2.2 (za detalje dokaza v. npr. [25]).

4. Izraziti u eksplicitnom obliku formule inverzne formulama prelaza s polarnih, odnosno sfernih, na pravougle koordinate (v. primere 2.2.1). Koliki su jakobijani tih transformacija?

5. Neka je funkcija $f\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ data sa $f(0)=0$ i $f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x}$ za $x\neq 0$. Dokazati da f zadovoljava sve uslove teoreme o inverznoj funkciji osim neprekidnosti izvoda $f'(x)$ u tački 0, a da f nije injektivna ni u jednoj okolini tačke 0.

6. Neka je funkcija $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ data sa $f(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$. Dokazati da svaka tačka $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ ima okolinu u kojoj je f invertibilna, ali da $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ nije injektivna.

7. Pod pretpostavkama stava 4.1 za $m=k=2$ napisati izraze za druge parcijalne izvode funkcije f^{-1}.

8. Neka je $A\subset\mathbf{R}^m$ otvoren skup, $f\in C^1(A,\mathbf{R}^m)$ i $\det df(x)\neq 0$ za $x\in A$. Dokazati da je za svaki otvoren skup $B\subset A$ njegova slika $f(B)$ otvoren skup u $\mathbf{R}^m$.

9. Neka je $a\in\mathbf{R}^m$ i $r>0$. Preslikavanje $f\colon\mathbf{R}^m\setminus\{a\}\to\mathbf{R}^m$, dato sa

$$f(x)=a+\frac{r}{\|x-a\|}(x-a),$$

naziva se *inverzijom* s centrom u tački a i poluprečnikom r. Dokazati da je f difeomorfizam i da je

$$f\big(\{x\mid 0<\|x-a\|<r\}\big)=\{x\mid\|x-a\|>r\}.$$

10. Neka su $A\subset\mathbf{R}^m$ i $B\subset\mathbf{R}^n$ otvoreni skupovi i $f\colon A\to B$ bijekcija, takva da su f i f^{-1} diferencijabilne funkcije na A, odnosno B. Dokazati da je $m=n$.

11. Funkcija $f\colon\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R}^2$ data je sa

$$f(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Odrediti $\operatorname{rang} df(x,y)$ i sliku $f(\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\})$.

12. Neka je funkcija $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ data sa $f(x,y)=(u,v)$,

$$u=\begin{cases}x^3y^2, & \text{za } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{za } x<0,\end{cases}\qquad v=\begin{cases}x^2y^3, & \text{za } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{za } y<0.\end{cases}$$

Dokazati da je

$$\operatorname{rang} df(x,y)=\begin{cases}2, & \text{za } x,y>0,\\ 1, & \text{za } xy<0,\\ 0, & \text{za } x,y<0\end{cases}$$

i da su u oblasti $(0,+\infty)^2$ funkcije u i v nezavisne.

13. Neka je $f\in C^2(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$ i $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ („Laplasov* operator“). Ako su promenljive x, y, z povezane s promenljivim u, v, w pomoću:

(a) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=w$ („cilindrične koordinate“),

(b) $x=u\sin v\cos w$, $y=u\sin v\sin w$, $z=u\cos v$ („sferne koordinate“),

dokazati da je:

(a) $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}$,

(b) $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\dfrac{\operatorname{ctg} v}{u^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{1}{u^2\sin^2 v}\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}$.

14. Dokazati da funkcija $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ na površi $\dfrac{x^4}{a^4}+\dfrac{y^4}{b^4}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$ ima 14 tačaka lokalnog ekstremuma, od kojih su šest minimumi, a osam maksimumi.

15. Elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$ presečen je sa ravni $lx+my+nz=0$ koja prolazi kroz njegov centar. Dokazati da su poluose presečne elipse pozitivna rešenja (po r) jednačine

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-r^2}=0.$$

16. Neka je $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^m$ simetrična realna matrica i $\Phi(x)=\sum\limits_{i,j=1}^m a_{ij}x_ix_j$ odgovarajuća kvadratna forma. Ako funkcija Φ pri uslovu $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^m x_i^2-1=0$ postiže lokalni ekstremum na vektoru x, dokazati da je x svojstveni vektor matrice A, tj. da važi $Ax=\lambda x$, $\det(A-\lambda E)=0$, gde je E odgovarajuća jedinična matrica. Vrednost tog ekstremuma jednaka je odgovarajućoj svojstvenoj vrednosti λ matrice A. Specijalno, dokazati da takva kvadratna matrica *ima* bar jednu realnu svojstvenu vrednost, a njena najveća svojstvena vrednost jednaka je maksimumu funkcije Φ na skupu $\{x\in\mathbf{R}^m\mid\varphi(x)=0\}$. Dati geometrijsku interpretaciju ovih činjenica.

* P. S. Laplace (1749–1827), francuski matematičar

17. Neka je $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ kvadratna matrica i $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = A_j$ $(j = 1, \dots, n)$, gde su $A_1, \dots, A_n$ fiksirani nenegativni realni brojevi. Dokazati:

1° da bi funkcija $(\det A)^2$ imala ekstremum pri datim uslovima, neophodno je da su vrste matrice A međusobno ortogonalne;

2° $\max_A (\det A)^2 = A_1 A_2 \cdots A_n$;

3° za svaku kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ važi *Adamarova nejednakost*:

$$(\det A)^2 \leqslant \prod_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \Big).$$

4. NEKE PRIMENE DIFERENCIJALNOG RAČUNA U GEOMETRIJI

U elementarnoj i analitičkoj geometriji detaljnije se proučava samo manji broj tipova linija (prava, kružna linija, elipsa, hiperbola, parabola) i površi (ravan, sfera, elipsoid, hiperboloid, paraboloid, konus). Metode diferencijalnog i integralnog računa omogućavaju da se ispitaju svojstva širokih klasa linija i površi. Koristeći ove metode, moguće je definisati tangente i normale, odnosno normalne ravni, linija, tangentne ravni i normale površi, kao i niz drugih pojmova koji dozvoljavaju dublje proučavanje linija i površi.

4.1. KRIVE U PROSTORU $\mathbf{R}^n$

U odeljku 8.5 iz M.A.I definisali smo krivu liniju u ravni. Umesto $\mathbf{R}^2$ stavimo u toj definiciji $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, i dobićemo pojam krive u prostoru $\mathbf{R}^n$. Takva kriva određena je, dakle, neprekidnom funkcijom (putanjom) $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, gde je $\Delta \subset \mathbf{R}$ interval, koja ima svoj koordinatni prikaz $\big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$. Pri tom ćemo smatrati da različitim vrednostima parametra t odgovaraju različite tačke krive.

Posebno, krive u prostoru $\mathbf{R}^3$ obično zadajemo u obliku $f(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, ili $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \Delta$.

Ukažimo na jednu mehaničku interpretaciju putanje. Uočimo tačku M koja se kreće u prostoru $\mathbf{R}^n$. Pretpostavimo da je u momentu t položaj tačke M određen koordinatama $x_1(t)$, $\dots$, $x_n(t)$. Vektor $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ naziva se i *vektorom položaja* tačke M. U ovoj glavi ćemo za takve vektore koristiti i oznaku $\vec{r}(t)$. Ako sa $\{e_1, \dots, e_n\}$ označimo standardnu vektorsku bazu u prostoru $\mathbf{R}^n$, onda za vektor položaja $\vec{r}(t)$ imamo izraz $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) e_i$. Specijalno, u prostoru $\mathbf{R}^3$ vektor položaja $\vec{r}(t)$ pisaćemo u obliku $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ili $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, gde je $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Kriva po kojoj se kreće tačka M s promenljivim vektorom položaja $\vec{r}(t)$ naziva se i *hodografom* vektorske funkcije $\vec{r}(t)$.

Posmatrajmo proizvoljnu putanju $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, $\Delta \subset \mathbf{R}$. Sa Γ označimo krivu liniju definisanu ovom putanjom. Kaže se i da je Γ parametrizovana parametrom t, $t \in \Delta$. Da li se ona može parametrizovati i nekim drugim parametrom?

Neka je $u\colon \Delta' \to \Delta$, $\Delta' \subset \mathbf{R}$, neprekidna, surjektivna i strogo monotona funkcija. Kompoziciju $f \circ u\colon \Delta' \to \mathbf{R}^n$ označimo sa g. Putanje $f(t)$, $t \in \Delta$ i $g(t')$, $t' \in \Delta'$, definišu jednu te istu krivu Γ.

Dve putanje koje određuju jednu te istu krivu nazovimo *ekvivalentnim*. Dakle, neka kriva može biti parametrizovana različitim parametrima.

Primeri 4.1.1

1° Neka je $y = f(x)$, $x \in \Delta \subset \mathbf{R}$, jednačina date krive u ravni. Parametrizujmo ovu krivu stavljajući $x = t$. Tada imamo vektorsku jednačinu date krive

$$\vec{r} = t\vec{\imath} + f(t)\vec{\jmath}, \quad t \in \Delta.$$

2° Kružnica u xOy ravni s centrom $C(a,0)$ i poluprečnikom a ima jednačinu $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Parametrizujmo ovu kružnicu uzimajući za parametar t koeficijent pravca vektora položaja tačke na njoj. Stavljanjem $y/x = t$ dobija se vektorska jednačina

$$\vec{r} = \frac{2a}{1+t^2}\vec{\imath} + \frac{2at}{1+t^2}\vec{\jmath}, \quad t \in \overline{\mathbf{R}},$$

(podrazumeva se $\vec{r}(\pm\infty) = (0,0)$).

Ovu krivu možemo parametrizovati i uzimajući za parametar ugao φ koji vektor $\overrightarrow{CM}$ (M je tačka na krivoj) gradi s pozitivnim smerom x-ose. Tada njene jednačine glase

$$x = a + a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

3° Kriva linija određena jednačinama

$$x = 2R\sin^2 t, \quad y = 2R\sin t\cos t, \quad z = 2R\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{1}$$

nalazi se na preseku sfere $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$, i cilindra $x^2+y^2 = 2Rx$ u prostoru $\mathbf{R}^3$. Ovo se lako uviđa eliminacijom parametra t najpre iz sve tri jednačine (1), a potom iz prve dve od jednačina (1). Ovu krivu nazivaju *Vivijanijevom* krivom.*

4° Putanja $f(t) = ta + b$, $t \in \mathbf{R}$, gde su $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ fiksirani, određuje pravu u prostoru $\mathbf{R}^n$. Ovu parametrizovanu pravu predstavljamo još i u obliku

$$x_1 = a_1 t + b_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n t + b_n, \qquad t \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangle$$

* V. Viviani (1622–1703), italijanski matematičar i fizičar

Neka je kriva Γ određena putanjom $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$. Na krivoj Γ smatramo da postoji uređenje $\prec$: za tačku M_{t_1} kažemo da je ispred tačke M_{t_2}, $M_{t_1} \prec M_{t_2}$, ako je $t_1 < t_2$, gde parametrima $t_1, t_2 \in \Delta$ odgovaraju tačke M_{t_1}, odnosno M_{t_2}. Ovu činjenicu ćemo izraziti još i rečima: kriva Γ je orijentisana. Uzimajući u obzir i orijentaciju krive Γ, mi ćemo je označavati sa Γ_+. Ako krivu Γ parametrizujemo novim parametrom $t' \in \Delta'$, pri čemu je $u\colon \Delta' \to \Delta$ strogo opadajuća funkcija, a putanja koja određuje krivu Γ je data sa $f \circ u\colon \Delta' \to \mathbf{R}^n$, onda je ispunjen uslov

$$t'_2 < t'_1 \implies M_{t'_1} \prec M_{t'_2}.$$

Kazaćemo da je kriva Γ u ovom slučaju suprotne orijentacije u odnosu na prvobitnu orijentaciju. Uzimajući u obzir ovu orijentaciju, krivu ćemo označavati sa Γ_-. Pri tom ćemo orijentaciju krive Γ_+ nazvati *pozitivnom*, a orijentaciju krive Γ_- *negativnom.*

Napomenimo na kraju očiglednu činjenicu: izbor orijentacije neke krive je uslovan; ako jednu od dve orijentacije izaberemo za pozitivnu, onda će orijentacija suprotna njoj biti negativna.

Za krivu Γ se kaže da je *glatka* ako se može zadati pomoću glatke vektorske funkcije, definisane na $\Delta \subset \mathbf{R}$; ona je *neprekidna, deo-po-deo glatka* ako se može zadati pomoću neprekidne vektorske funkcije $f(t)$, $t \in \Delta \subset \mathbf{R}$, tako da se interval Δ može podeliti na konačan broj disjunktnih intervala na kojima je restrikcija funkcije $f(t)$ glatka.

Dužina luka krive Γ, određene funkcijom $f(t)$, $t \in \Delta$, definiše se slično kao u slučaju krivih u ravni (v. odeljak 8.5 iz M.A.I). Krive linije koje imaju dužinu nazivaju se *rektificibilnim.* Ako je kriva Γ neprekidna, deo-po-deo glatka, može se pokazati da se dužina s njenog luka između tačaka $\big(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\big)$ i $\big(f_1(\beta), \ldots, f_n(\beta)\big)$ izračunava po formuli

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f_1'^2(t) + \cdots + f_n'^2(t)}\, dt. \tag{2}$$

Primeri 4.1.2

1° Dužina segmenta prave $\vec{r}(t) = (a_1, \ldots, a_n)t + (b_1, \ldots, b_n)$ s krajnjim tačkama $\vec{r}_1 = (b_1, \ldots, b_n)$ za $t = 0$ i $\vec{r}_2 = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ za $t = 1$, prema (2) iznosi

$$s = \int_0^1 \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\, dt = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

2° Nađimo dužinu luka *zavojnice* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ od tačke $t = 0$ do tačke $t = 2\pi$ (a, $b > 0$).

Kako je $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$ i $x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2$, to će dužina s datog luka biti

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}. \quad \blacktriangle$$

Posmatrajmo proizvoljnu neprekidnu, deo-po-deo glatku krivu Γ datu jednačinom $\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$, $t \in \Delta$, i uočimo proizvoljnu tačku M_0 na njoj; pri tom je $\vec{r}(t_0)$ vektor položaja tačke M_0. Sa $s(t)$ označimo dužinu luka te krive od tačke M_0 do tačke M kojoj odgovara parametar t; neka je $s(t_0) = 0$. Dakle je

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t)}\, dt. \tag{3}$$

Pretpostavimo da je $x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t) > 0$, $t \in \Delta$. Tada je $s(t)$ strogo rastuća funkcija i krivu Γ možemo parametrizovati parametrom s. Primetimo da vrednostima $t > t_0$ odgovaraju pozitivne vrednosti s, a vrednostima $t < t_0$ odgovaraju negativne vrednosti s. Ponekad se kaže da je kriva Γ parametrizovana *prirodnim parametrom* ako je parametrizovana pomoću luka s.

Za datu diferencijabilnu vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ realne promenljive t, vektor $(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ koji određuje njen diferencijal zvaćemo i *prvim izvodom* i označavati sa

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t));$$

ako je odgovarajuća kriva parametrizovana prirodnim parametrom, onda se prvi izvod označava sa

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'(s) = (x_1'(s), \ldots, x_n'(s)).$$

Slično ćemo vektor $(x_1''(t), \ldots, x_n''(t))$, odnosno $(x_1''(s), \ldots, x_n''(s))$, nazivati *drugim izvodom* funkcije $\vec{r}$ i označavati sa

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t), \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{r}''(s).$$

Primetimo da se izraz za dužinu luka može napisati u obliku

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt. \tag{4}$$

Odatle sledi

$$|ds| = \|\dot{\vec{r}}(t)\| \cdot |dt|.$$

S druge strane, vrednost diferencijala vektora $\vec{r}(t)$ za vrednost dt priraštaja nezavisno promenljive je $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\, dt$, pa je

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1, \tag{5}$$

odnosno

$$d\vec{r}^{\,2} = ds^2. \tag{6}$$

PRIMER 4.1.3

Zavojnicu $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbf{R}$ $(a,\ b > 0)$ parametrizujmo prirodnim parametrom.

Označimo

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Odavde je

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

pa je dužina luka $s(t)$ od tačke $t = 0$ do proizvoljne tačke t

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kako je $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, to je

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangle$$

4.2. TANGENTA

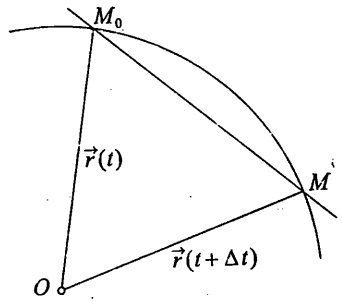
Počevši od ovog odeljka nadalje posmatraćemo krive u prostoru $\mathbf{R}^3$, ukoliko drugačije ne naglasimo. Za vektore u $\mathbf{R}^3$ normu (tj. intenzitet) ćemo označavati i sa $|\vec{r}| = \|\vec{r}\|$.

Neka je Γ proizvoljna kriva i M_0 tačka na njoj, sl. 1. Uočimo sečicu krive Γ koja prolazi kroz tačku M_0 i neku tačku M na krivoj. Ako postoji granični položaj te sečice kad tačka M teži tački M_0, onda se granična prava naziva *tangentom* krive Γ u tački M_0.

Pretpostavimo da jednačina krive ima oblik $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i da tačkama M_0 i M odgovaraju vrednosti parametra t, odnosno $t + \Delta t$. Vektori položaja tačaka M_0 i M su $\vec{r}(t)$, odnosno $\vec{r}(t + \Delta t)$. Vektor $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$ ima pravac sečice M_0M, kao i vektor $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Ako postoji $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ili, što je isto, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, taj vektor će imati pravac tangente. S druge strane je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Dakle, pravac vektora $\dot{\vec{r}}(t)$ je pravac tangente krive Γ u tački M_0. Primetimo da je vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ usmeren na tangenti u smeru rastenja parametra t.



Sl. 4.2.1

U cilju nalaženja jednačine tangente u tački $M(x(t),y(t),z(t))$, sa $\vec{\rho}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$ označimo vektor položaja proizvoljne tačke M na tangenti, pa je

$$\vec{\rho}=\vec{r}+\lambda\dot{\vec{r}},\quad \lambda\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

odnosno

$$X=x+\lambda x',\quad Y=y+\lambda y',\quad Z=z+\lambda z' \tag{2}$$

tj.

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}. \tag{3}$$

Nekad se stavlja $x'=\frac{dx}{dt}$, $y'=\frac{dy}{dt}$, $z'=\frac{dz}{dt}$, pa se iz (3) dobijaju jednačine tangente

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}. \tag{4}$$

Primer 4.2.1

Jednačine tangente zavojne linije u tački $t=\pi/4$ su

$$\frac{X-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-a\sqrt{2}}=\frac{Y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a\sqrt{2}}=\frac{Z-\frac{b\pi}{4}}{2b},$$

jer je $\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}+\frac{b\pi}{4}\vec{k}$ i $\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}+b\vec{k}$. ▲

Sa α, β, γ označimo uglove koje vektor $\dot{\vec{r}}$ obrazuje sa x-osom, y-osom, odnosno z-osom. Iz (3) sledi

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \cos\gamma=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Kako je $\frac{dx}{ds}=\frac{dx/dt}{ds/dt}$ i $\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, i slično važi za $\frac{dy}{ds}$ i $\frac{dz}{ds}$, to imamo jednakosti

$$\frac{dx}{ds}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}. \tag{5}$$

Primer 4.2.2

Pokažimo da se kriva $\vec{r}(t)=e^{mt}(a\cos t\vec{\imath}+a\sin t\vec{\jmath}+b\vec{k})$, $t\in\mathbf{R}$ (*cilindro-konusna zavojna linija*) nalazi na konusu $b^2(x^2+y^2)-a^2z^2=0$ i seče njegove izvodnice pod stalnim uglom.

Zaista, koordinate $x=ae^{mt}\cos t$, $y=ae^{mt}\sin t$, $z=be^{mt}$ proizvoljne tačke krive zadovoljavaju jednačinu konusa, jer je $b^2(a^2e^{2mt}\cos^2 t+a^2e^{2mt}\sin^2 t)-a^2b^2e^{2mt}=0$.

Ako sa α, β, γ označimo uglove koje vektor tangente krive u proizvoljnoj tački $\vec{r}(t)$ zaklapa sa koordinatnim osama, a sa α_1, β_1, γ_1 označimo uglove koje izvodnica konusa u tački $\vec{r}(t)$ zaklapa sa koordinatnim osama, onda je

$$\cos\alpha=\frac{a(m\cos t-\sin t)}{\sqrt{m^2(a^2+b^2)+a^2}},\quad \cos\alpha_1=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{a(m\sin t+\cos t)}{\sqrt{m^2(a^2+b^2)+a^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{mb}{\sqrt{m^2(a^2+b^2)+a^2}},\quad \cos\gamma_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Za ugao φ između tangente i izvodnice imamo

$$\cos\varphi=\frac{m(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{m^2(a^2+b^2)+a^2}}.$$ ▲

Pomenimo još jedno svojstvo izvoda vektorske funkcije $\vec{r}(t)$.

Stav 4.2.1

Ako je norma $|\vec{r}(t)|$ vektora $\vec{r}(t)$ konstantna, onda su vektori $\vec{r}(t)$ i $\dot{\vec{r}}(t)$ međusobno normalni.

Dokaz.

Ako je $|\vec{r}(t)|=c=\text{const}$, onda je $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=c^2$. Diferenciranjem ove jednakosti dobija se $\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{r}(t)=0$, što znači da su $\vec{r}(t)$ i $\dot{\vec{r}}(t)$ normalni (uz pretpostavku da su različiti od nule). ■

Posebno, ako je kriva $\vec{r}=\vec{r}(t)$ u ravni Oxy, jednačina tangente (3) ima oblik

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'},$$

odnosno, ako je kriva data u obliku $y=f(x)$, onda je $x'=1$, $y'=f'(x)$, pa je jednačina tangente

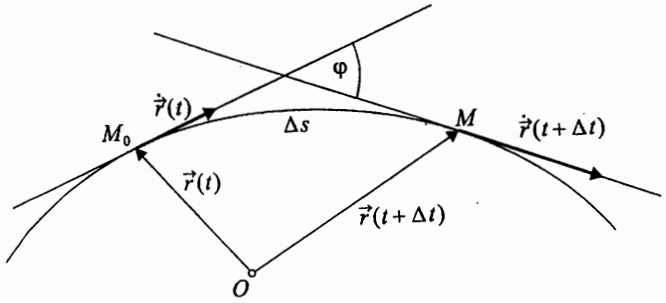
$$Y-y=f'(x)(X-x). \tag{6}$$

U ovom slučaju definiše se normala u tački (x,y) krive. Naime, prava koja prolazi kroz tačku (x,y) i normalna je na tangentu krive u toj tački naziva se *normalom*. Ako je koeficijent pravca tangente $f'(x)\neq 0$, onda je koeficijent pravca normale $-1/f'(x)$, pa je njena jednačina

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x). \tag{7}$$

4.3. KRIVINA. EVOLUTA

Posmatrajmo glatku krivu Γ. Ako se neka tačka kreće po njoj, odgovarajuća tangenta menja pravac. U cilju merenja brzine promene pravca tangente uočimo tačke M_0 i M na krivoj Γ, sl. 1.



Sl. 4.3.1

Dužinu luka $\overset{\frown}{M_0M}$ označimo sa Δs, a ugao između odgovarajućih tangenata sa φ. Količnik $\frac{\varphi}{\Delta s}$ nazovimo srednjom krivinom luka $\overset{\frown}{M_0M}$. Limes $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}=K$ (ako postoji) nazovimo *krivinom krive* Γ u tački M_0. Dakle, krivina K krive Γ u tački M_0 je

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s}. \tag{1}$$

Recipročna vrednost krivine K naziva se *poluprečnikom krivine*, u oznaci $R=\frac{1}{K}$ (ako je $K=0$, formalno stavljamo $R=\infty$).

Pretpostavimo da je data jednačina $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in\Delta$, krive Γ i da postoji $\ddot{\vec{r}}(t)$. Pokazaćemo da postoji krivina u tački M_0, koja je određena vektorom položaja $\vec{r}(t)$.

Količnik $\frac{\varphi}{\Delta s}$ napišimo u obliku $\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\Delta s}$. Kako je φ ugao između vektora tangente $\dot{\vec{r}}(t)$ u tački M_0 i vektora tangente $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)$ u tački M, a iz $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)-\dot{\vec{r}}(t)=\Delta\dot{\vec{r}}(t)$ sledi $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)=\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)$, to je

$$\sin\varphi=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times(\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t))|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|},$$

jer je $\dot{\vec{r}}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)=\vec{0}$. Primetimo da se priraštaj luka Δs može napisati u obliku $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$, gde je $s(t)$ dužina luka merena od neke tačke na krivoj.

Uzevši u obzir da iz $\Delta s\to 0$ sledi $\Delta t\to 0$ i $\varphi\to 0$, jednakost (1) možemo napisati u obliku

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\times\frac{\Delta\dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t}\right|}{\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|},$$

što daje

$$\frac{1}{R}=K=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}, \tag{2}$$

jer je $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=|\dot{\vec{r}}(t)|$ i $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t}=\ddot{\vec{r}}(t)$.

Ako je vektorska funkcija data u obliku $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, onda je

$$K=\frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Kada je kriva parametrizovana pomoću prirodnog parametra s, onda iz jednakosti $|\vec{r}'(s)|=1$ sledi $\vec{r}'(s)\perp\vec{r}''(s)$, pa iz (2) dobijamo

$$K=|\vec{r}''(s)|,\qquad R=\frac{1}{|\vec{r}''(s)|}. \tag{4}$$

Ako je kriva Γ u ravni Oxy, onda su jednačine krive oblika $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=0$, pa je iz (3)

$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \tag{5}$$

dok za krivu oblika $y=f(x)$ imamo

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\qquad R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \tag{6}$$

Primeri 4.3.1

1° Nađimo krivinu i poluprečnik krivine zavojnice $\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $t\in\mathbf{R}$, u proizvoljnoj tački.

Napišimo jednačinu zavojnice u obliku

$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

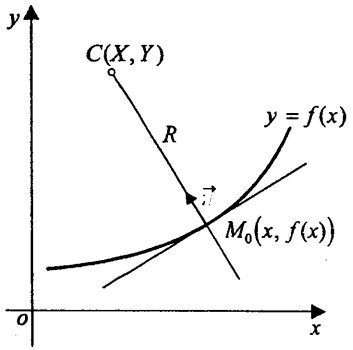
(v. primer 1.3). Tada je

$$\vec{r}''(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right),$$

odakle sledi $K = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $R = \dfrac{a^2+b^2}{a}$.

2° Nađimo krivinu u proizvoljnoj tački parabole $y^2 = 2px$. U kojoj tački parabole je krivina maksimalna?

Koristićemo jednakost (6). U tom cilju izračunavamo $y' = \dfrac{p}{y}$, $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$, pa dobijamo $K = \dfrac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}$, odakle se vidi da je u tački $(0,0)$ krivina maksimalna. ▲



Sl. 4.3.2

U tački $M_0(x, f(x))$ grafika Γ funkcije $y = f(x)$, $x \in \Delta \subset \mathbf{R}$, sa R označimo poluprečnik krivine. Tačku C koja se nalazi na normali krive Γ na rastojanju R od tačke M_0 u smeru konkavnosti krive Γ, nazovimo *centrom krivine* krive Γ u tački M_0, sl. 2. Krug sa centrom C i poluprečnikom CM_0 nazivamo *krugom krivine* krive Γ u tački M_0.

Za nalaženje koordinata centra krivine pretpostavimo da je funkcija f dvaput diferencijabilna i da je $f''(x) > 0$.

Kako je vektor tangente $\vec{\tau} = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right)$ poznat, to je lako izračunati vektor $\vec{n}$ normale, $\vec{n} = \left(-\dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dx}{ds}\right)$. Za koordinate X, Y centra krivine imamo $X = x + R\left(-\dfrac{dy}{ds}\right)$, $Y = y + R\dfrac{dx}{ds}$. Stavljajući u ove jednakosti $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ (v. formule (5) odeljka 2), dobija se

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{7}$$

Formule (7) dobijaju se i u slučaju kada je $f''(x) < 0$ (s tim što je tada $\vec{n} = \left(\dfrac{dy}{ds}, -\dfrac{dx}{ds}\right)$).

DEFINICIJA 4.3.1

Geometrijsko mesto centara krivine ravne krive naziva se *evolutom* te krive.

Neka je data glatka kriva $y = f(x)$, $x \in \Delta \subset \mathbf{R}$, i neka postoji $f''(x)$, $x \in \Delta$. Sa x, y označimo koordinate proizvoljne tačke na krivoj, a sa X, Y koordinate centra krivine u toj tački. Iz (7) dobijamo parametarske jednačine evolute

$$X = x - \frac{f'(x)(1+f'^2(x))}{f''(x)}, \quad Y = f(x) + \frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.$$

PRIMER 4.3.2

Nađimo evolutu parabole $y^2 = 2px$.

Kako je $y' = \dfrac{p}{y}$, $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$, to je prema (7)

$$X = 3x + p, \quad Y = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Iz ovih parametarskih jednačina evolute date parabole možemo dobiti jednačinu evolute u obliku $Y^2 = \dfrac{8}{27p}(X-p)^3$. ▲

4.4. FUNDAMENTALNI TRIEDAR

Neka je kriva Γ data u obliku $\vec{r} = \vec{r}(s)$, gde je $\vec{r}(s)$ dvaput diferencijabilna funkcija. Izaberimo na njoj proizvoljnu tačku M_0 sa koordinatama $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. Sa $\vec{\tau}$ označimo vektor tangente, $\vec{\tau} = \vec{r}'(s)$, krive Γ u tački M_0. Kako je $|\vec{\tau}| = 1$, to je $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}$. Označimo dalje

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{r}'}{ds} = \vec{r}''(s), \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|} = R\cdot\vec{r}''(s), \tag{1}$$

jer je poluprečnik krivine R jednak $1/|\vec{r}''(s)|$.

Vektor $\vec{\tau}$ određuje tangentu, a vektor $\vec{\nu}$, koji je normalan na $\vec{\tau}$, određuje pravu koju nazivamo *glavnom normalom* krive Γ u tački M_0. Očito se kroz tačku M_0 može povući beskonačno mnogo normalnih pravih na tangentu; jedna od tih pravih je glavna normala.

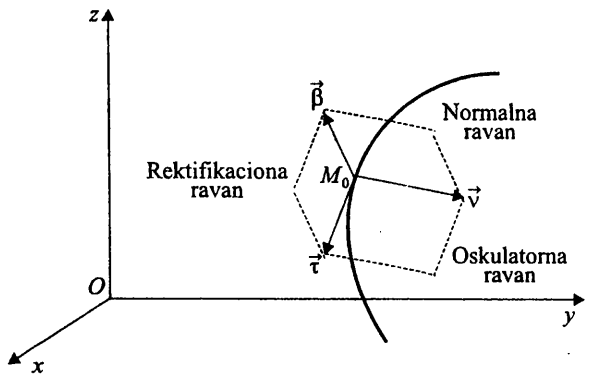
Vektor $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$ određuje pravu koja je normalna i na tangentu i na glavnu normalu; ona se naziva *binormalom* krive Γ u tački M_0.

Tangenta, glavna normala i binormala u tački M_0 obrazuju triedar koji se naziva *fundamentalnim triedrom*. Tačka M_0 je proizvoljna tačka krive Γ; dakle je fundamentalni triedar vezan za svaku tačku krive Γ. Ravni fundamentalnog triedra su:

(a) *normalna ravan* sa normalnim vektorom $\vec{\tau}$,

(b) *rektifikaciona ravan* sa normalnim vektorom $\vec{\nu}$,

(c) *oskulatorna ravan* sa normalnim vektorom $\vec{\beta}$.



Sl. 4.4.1

Navedimo nekoliko svojstava fundamentalnog triedra, odnosno njegovih osa i ravni, sl. 1.

Stav 4.4.1

Smenom parametra s parametrom $s_1 = -s$ u jednačini $\vec{r} = \vec{r}(s)$ krive Γ, za vektore $\vec{\tau}_1$, $\vec{\nu}_1$, $\vec{\beta}_1$ dobijenog fundamentalnog triedra važe jednakosti

$$\vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}, \quad \vec{\nu}_1 = \vec{\nu}, \quad \vec{\beta}_1 = -\vec{\beta},$$

gde su $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ vektori fundamentalnog triedra koji zavise od s.

Dokaz.

Prva jednakost sledi iz

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds_1} = -\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{\tau},$$

a druga iz

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{r}}{ds_1}\right) = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Za treću jednakost uočimo da je $\vec{\beta}_1 = \vec{\tau}_1 \times \vec{\nu}_1 = -(\vec{\tau} \times \vec{\nu}) = -\vec{\beta}$. ■

Stav 4.4.2

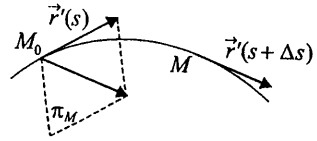
Oskulatorna ravan krive Γ u tački M_0 je granični položaj ravni koja sadrži tangentu u tački M_0 i paralelna je tangenti u tački M krive Γ, kada M teži M_0.

Dokaz.

Vektor $\vec{r}'(s+\Delta s) - \vec{r}'(s) = \Delta\vec{r}'(s)$ je paralelan ravni π_M koja prolazi kroz tačku M_0, sadrži vektor $\vec{r}'(s)$ i paralelna je vektoru $\vec{r}'(s+\Delta s)$. No, i vektor $\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta s}$ paralelan je ravni π_M, pa je vektor $\vec{r}'(s) \times \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta s}$ normalan na ravan π_M, sl. 2. Primetimo da iz $\Delta s \to 0$, sledi $M \to M_0$. Prema tome, granični položaj ravni π_M kad $M \to M_0$ ima normalu oblika

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left(\vec{r}'(s) \times \frac{\Delta\vec{r}'(s)}{\Delta s}\right) = \vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s).$$

Kako ova granična ravan prolazi kroz tačku M_0, to se ona poklapa sa oskulatornom ravni krive Γ u toj tački. ■



Sl. 4.4.2

Primetimo da iz stava 1 sledi da vektor $\vec{\nu}$ ne zavisi od toga na koji je način parametrizovana kriva Γ pomoću prirodnog parametra. Vektor $\vec{\nu}$ je usmeren u stranu konkavnosti projekcije krive Γ na oskulatornu ravan.

Uočimo vektor $\vec{\nu}$ glavne normale u tački M_0 krive Γ, date vektorskom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Sa R neka bude označen poluprečnik krivine krive Γ u tački M_0. Tačka C čiji vektor položaja je $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{\nu}$ naziva se *centrom krivine* krive Γ u tački M_0. Prema jednakostima (4) odeljka 3 i jednakostima (1), za centar krivine važi

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|^2}.$$

Kada se tačka sa vektorom položaja $\vec{r}(s)$ kreće po krivoj Γ, meru brzine promene vektora $\vec{r} = \vec{r}'(s)$ daje izvod $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}''(s) = \frac{1}{R}\vec{\nu}$. Potražimo brzinu promene vektora $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$. Pođimo od jednakosti $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 1$ i $\vec{\beta} \cdot \vec{\tau} = 0$. Odatle diferenciranjem dobijamo

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\beta} = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\beta},$$

i

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\tau} = -\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\vec{\beta} \cdot \frac{1}{R}\vec{\nu} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\tau}.$$

Kako je $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ normalan na $\vec{\tau}$ i $\vec{\beta}$, to je kolinearan sa $\vec{\nu}$. Stavimo

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \varkappa\vec{\nu}.$$

Realan broj $\varkappa$ naziva se *torzijom (uvrtanjem)* krive Γ u tački $\vec{r}(s)$. Recipročna vrednost torzije $\frac{1}{\varkappa} = T$ je *poluprečnik torzije* (nekada se za krivinu i torziju koriste

izrazi prva krivina, odnosno druga krivina). Torzija $\varkappa$ krive Γ u tački M_0, koja je po apsolutnoj vrednosti jednaka normi vektora $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$, predstavlja meru brzine odstupanja od oskulatorne ravni, kada se tačka kreće po krivoj Γ.

Teorema 4.4.1 *(Freneove* formule)*

Za vektore $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ važe jednakosti

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{1}{T}\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} - \frac{1}{T}\vec{\beta}. \tag{2}$$

Dokaz.

Prve dve jednakosti slede iz odgovarajućih definicija. U cilju dokaza treće nađimo projekcije vektora $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ na vektore $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ i $\vec{\beta}$. Iz $\vec{\tau}\cdot\vec{\nu} = 0$, $\vec{\nu}\cdot\vec{\nu} = 1$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = 0$ dobijamo

$$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{\nu} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}\cdot\vec{\nu} = 0, \quad \vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{d\vec{\beta}}{ds}\cdot\vec{\nu} = -\frac{1}{T}.$$

Prema tome je $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} - \frac{1}{T}\vec{\beta}$. ■

Posledica 4.4.1

Neka su K i $\varkappa$ krivina i torzija krive Γ, date jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Tada

1° ako je $K \equiv 0$, onda Γ pripada pravoj liniji;

2° ako je $\varkappa \equiv 0$, onda je Γ ravna kriva.

Dokaz.

1° Ako je $K \equiv 0$, onda je $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$, odnosno $\vec{\tau} = \text{const}$; dakle Γ pripada nekoj pravoj.

2° Ako je $\varkappa \equiv 0$, onda je $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0$. Za vektor položaja $\vec{r}(s)$ tačke čiji je vektor binormale $\vec{\beta}$ imamo

$$\frac{d}{ds}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}) = \frac{d\vec{\beta}}{ds}\cdot\vec{r} + \vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\beta}\cdot\vec{\tau} = 0.$$

Dakle, $\vec{\beta}\cdot\vec{r} = \text{const}$; drugačije rečeno, projekcija vektora $\vec{r}$ na osu određenu vektorom $\vec{\beta}$ konstantna je. To znači da se kriva Γ nalazi u ravni (oskulatornoj). ■

Primer 4.4.1

Nađimo torziju i poluprečnik torzije zavojne linije $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbf{R}$, u proizvoljnoj tački.

* J. F. Frenet (1816–1900), francuski matematičar

Napišimo jednačinu zavojnice u obliku

$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Tada je

$$\vec{r}\,'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\vec{r}\,''(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

Odavde je

$$\vec{\tau} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\vec{\nu} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right),$$

$$\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left(\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

Iz Freneove formule $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{1}{T}\vec{\nu}$ sledi $\frac{1}{T} = \frac{d\vec{\beta}}{ds}\cdot\vec{\nu}$, pa je

$$\frac{1}{T} = \varkappa = -\frac{b}{a^2+b^2}. \quad ▲$$

Ako je kriva data u obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gde je t proizvoljan parametar, onda se jednačine tangente, normale i binormale, kao i jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni nalaze pomoću vektora kolinearnih sa $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ i $\vec{\beta}$.

Stav 4.4.3

Ako je kriva Γ data u obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$, onda je vektor $\vec{\tau}$ kolinearan vektoru $\overrightarrow{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, vektor $\vec{\beta}$ vektoru $\overrightarrow{B} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, a vektor $\vec{\nu}$ vektoru $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{B}\times\overrightarrow{T}$.

Dokaz.

Smatrajući da je Γ parametrizovana pomoću luka s, a s zavisi od parametra t, imamo jednakost

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt}, \tag{3}$$

odakle se vidi da je $\vec{r}\,'(s)$ kolinearan vektoru $\overrightarrow{T}$.

Dalje je

$$(3') \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}\,'(s))\frac{ds}{dt} + \vec{r}\,'(s)\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \vec{r}\,''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{r}\,'(s)\frac{d^2s}{dt^2},$$

odakle imamo

$$(4) \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt} \times \vec{r}\,''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k(\vec{\tau} \times \vec{\nu}),$$

gde je $k = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$, tj. $\vec{\beta}$ je kolinearan vektoru $\overrightarrow{B}$. Očito je da je $\vec{\nu}$ kolinearan vektoru $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{T}$. ■

Stav 4.4.4

Ako je kriva Γ data u obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$, gde je funkcija $\vec{r}(t)$ tri puta diferencijabilna, onda se torzija može izračunati po formuli

$$\varkappa = -\frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2} = -\frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2},$$

gde je sa $[\cdot,\cdot,\cdot]$ označen mešoviti proizvod vektora.

Dokaz.

Iz treće jednačine (2) dobijamo

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} \times \vec{\tau} = -\frac{1}{T}\vec{\beta} \times \vec{\tau} = -\frac{1}{T}\vec{\nu},$$

odakle je

$$\frac{1}{T} = -\vec{\nu} \cdot \left(\frac{d\vec{\nu}}{ds} \times \vec{\tau}\right) = -\vec{\tau} \cdot \left(\vec{\nu} \times \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right).$$

Kako je $\vec{\nu} = R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, to je $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = R\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ i $\vec{\nu} \times \frac{d\vec{\nu}}{ds} = R^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)$, pa je

$$(5) \qquad \frac{1}{T} = -R^2\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right).$$

Diferencirajući (3') dobija se

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Na osnovu (3), (3') i (4) je

$$(6) \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Zamenjujući relaciju (2) odeljka 3 i (6) u (5) i uzimajući u obzir da je $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ dobija se

$$\frac{1}{T} = \varkappa = -\frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}. \quad ■$$

Primer 4.4.2

Data je kriva $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Naći jednačine tangente, glavne normale i binormale, kao i normalne, rektifikacione i oskulatorne ravni u tački $t = 1$. Kolika je torzija u toj tački?

Iz jednačine $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ je

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad \dot{\vec{r}}(1) = (1, 2, 3),$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 2, 6t), \qquad \ddot{\vec{r}}(1) = (0, 2, 6),$$

$\overrightarrow{T} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{B} = (6, -6, 2) = 2(3, -3, 1)$, $\overrightarrow{N} = (-22, -16, 18) = -2(11, 8, -9)$. Pri tom je $\vec{r}(1) = (1, 1, 1)$. Odavde dobijamo jednačine

$$\text{tangente:} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$
$$\text{glavne normale:} \quad \frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9},$$
$$\text{binormale:} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1},$$

kao i jednačine

$$\text{normalne ravni:} \quad x + 2y + 3z - 6 = 0,$$
$$\text{rektifikacione ravni:} \quad 11x + 8y - 9z - 10 = 0,$$
$$\text{oskulatorne ravni:} \quad 3x - 3y + z - 1 = 0.$$

Kako je $\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1) = (0, 0, 6)$, prema stavu 4 imamo $\varkappa = -\frac{3}{19}$. ▲

4.5. SINGULARNE TAČKE RAVNIH KRIVIH

Ako su u okolini U neke tačke (x,y) u ravni Oxy zadovoljeni uslovi za egzistenciju jedne od funkcija datih implicitno jednačinom $F(x,y)=0$, onda je tom jednačinom definisana kriva Γ u okolini U. Kada postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, koji nisu istovremeno jednaki nuli, onda se može odrediti odnos koordinata vektora tangente u datoj tački krive Γ. Iz jednakosti $F(x,y)=0$ sledi

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy=0,$$

pa jednačinu tangente u tački (x,y) možemo napisati u obliku $F_x(X-x)+F_y(Y-y)=0$, gde je stavljeno $\frac{\partial F}{\partial x}=F_x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=F_y$.

Posmatrajmo jednakost $F(x,y)=0$. Pretpostavimo da su u nekoj okolini tačke (x_0,y_0), $F(x_0,y_0)=0$, ispunjeni svi uslovi za egzistenciju implicitne funkcije sem jednog: neka je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Definicija 4.5.1

Tačka (x_0,y_0) naziva se *singularnom tačkom* krive date jednakošću $F(x,y)=0$ ako je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$. Tačke na krivoj koje nisu singularne nazivaju se *običnim tačkama* krive.

Kakva svojstva ima kriva u okolini singularne tačke? Da bismo to ispitali, posmatraćemo odnos između krive i proizvoljne prave koja prolazi kroz singularnu tačku.

Pretpostavimo da funkcija $F(x,y)$ ima neprekidne prve i druge parcijalne izvode u nekoj okolini singularne tačke $M_0(x_0,y_0)$. Pri tom, neka je ispunjen uslov

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)^2>0.$$

Koristeći se Tejlorovom formulom, napišimo jednakost $2F(x,y)=0$ u obliku

$$(1)\quad 2F(x,y)=F^0_{x^2}(x-x_0)^2+2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0)+F^0_{y^2}(y-y_0)^2+\varepsilon\rho^2=0,$$

gde je $F^0_{x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $F^0_{xy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, $F^0_{y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ i $\varepsilon\to 0$ za $\rho\to 0$. Prava kroz tačku (x_0,y_0) data je jednačinama

$$(2)\qquad x-x_0=\cos\alpha\cdot t,\quad y-y_0=\sin\alpha\cdot t,\qquad t\in\mathbf{R},$$

gde je α fiksirano, $0\leqslant\alpha<2\pi$. Presek prave (2) sa krivom (1) dobija se rešavanjem jednačine

$$(3)\qquad \cos^2\alpha\cdot F^0_{x^2}t^2+2\cos\alpha\sin\alpha\cdot F^0_{xy}t^2+\sin^2\alpha\cdot F^0_{y^2}t^2+\varepsilon t^2=0.$$

Jedno, dvostruko rešenje je $t=0$. No, kako i ε zavisi od t, $\varepsilon=\varepsilon(t)$, to i jednačina

$$(4)\qquad F^0_{x^2}\cos^2\alpha+2F^0_{xy}\cos\alpha\sin\alpha+F^0_{y^2}\sin^2\alpha+\varepsilon(t)=0$$

može da ima rešenja. Prvo rešenje odgovara tački M_0, a drugo (iz jednačine (4)) odgovara nekoj tački M, koja se takođe nalazi na krivoj (1) i pravoj (2). Kada $M\to M_0$, onda i $\varepsilon(t)\to 0$, pa jednačina (4) postaje

$$(5)\qquad F^0_{x^2}\cos^2\alpha+2F^0_{xy}\cos\alpha\sin\alpha+F^0_{y^2}\sin^2\alpha=0.$$

No, kada $M\to M_0$, onda prava (2) teži graničnom položaju ako jednačina (5) ima rešenje po α. To rešenje određuje granični položaj prave, a u isti mah i ponašanje krive (1) u okolini tačke M_0. S obzirom na broj rešenja jednačine (5) moguća su tri slučaja:

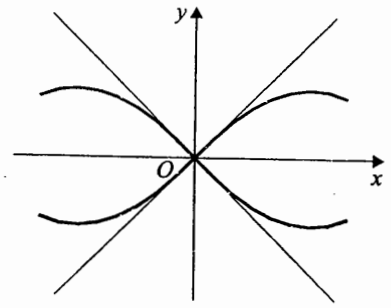
(a) $F^0_{x^2}F^0_{y^2}-(F^0_{xy})^2<0$ — postoje dva različita rešenja; kroz tačku M_0 prolaze dve prave koje dodiruju krivu u toj tački; tačka M_0 naziva se *dvojnom*.

(b) $F^0_{x^2}F^0_{y^2}-(F^0_{xy})^2>0$ — jednačina (5) nema rešenja; tačka M_0 se naziva *izolovanom*; pokazuje se da u njenoj dovoljno maloj okolini nema tačaka krive (sem same tačke M_0).

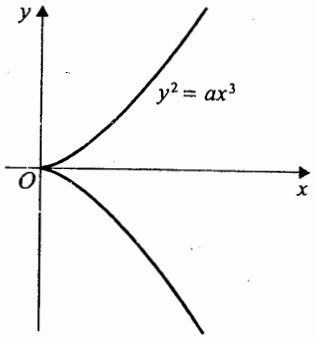
(c) $F^0_{x^2}F^0_{y^2}-(F^0_{xy})^2=0$ — jednačina ima jedno dvostruko rešenje; za poznavanje ponašanja krive u okolini tačke M_0 potrebno je detaljnije ispitivanje.

Primeri 4.5.1

1° Ispitajmo singularnu tačku $(0,0)$ krive $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2=0$.



Sl. 4.5.1



Sl. 4.5.2

Da je $(0,0)$ singularna tačka, sledi iz činjenice da je $(0,0)$ rešenje sistema jednačina

$$F_x = 4x^3 + 4xy^2 - 2x = 0, \quad F_y = 4x^2y + 4y^3 + 2y = 0.$$

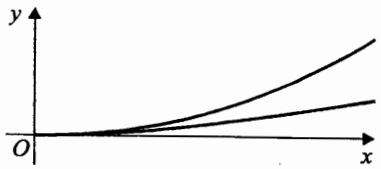
Kako je $F_{x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2$, $F_{xy} = 8xy$, $F_{y^2} = 4x^2 + 12y^2 + 2$ i $F^0_{x^2} = -2$, $F^0_{xy} = 0$, $F^0_{y^2} = 2$, to je $F^0_{x^2}F^0_{y^2} - (F^0_{xy})^2 = -4 < 0$. Jednačina (5) postaje

$$-2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0,$$

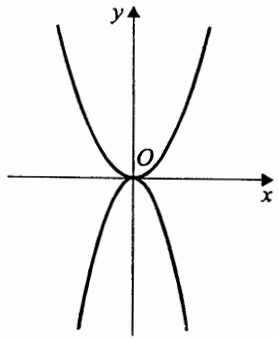
odakle je $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, tj. $\alpha = \pi/4$ ili $\alpha = 3\pi/4$. Tačka $(0,0)$ je dvojna, kroz nju prolaze dve grane date krive, čije tangente imaju koeficijente pravaca 1, odnosno -1. Oblik krive u okolini tačke $(0,0)$ je kao na slici 1.

2° Funkcija $\Phi(x,y) = (x^2-a^2)^2 + (y^2-b^2)^2 - a^4 - b^4$, $a, b \neq 0$, definiše krivu $\Phi(x,y) = 0$ i ima tačku $(0,0)$ kao singularnu. Iz $\Phi_{x^2}(0,0) = -4a^2$, $\Phi_{y^2}(0,0) = -4b^2$ sledi $\Phi^0_{x^2}\Phi^0_{y^2} - (\Phi^0_{xy})^2 = 16a^2b^2 > 0$. Tačka $(0,0)$ je izolovana. Lako se vidi da u dovoljno maloj okolini tačke $(0,0)$ nema tačaka date krive.

3° Koordinatni početak je singularna tačka krive $G(x,y) = y^2 - ax^3 = 0$, $a > 0$ (*polukubna parabola*). Kako je $G^0_{x^2}G^0_{y^2} - (G^0_{xy})^2 = 0$, to jednačina (5) ima jedan koren, $\alpha = 0$. Kriva ima jednu zajedničku polutangentu za dve grane krive, koje se u okolini tačke $(0,0)$ nalaze sa raznih strana polutangente, sl. 2. Tačka $(0,0)$ se naziva *povratnom tačkom prve vrste.*



Sl. 4.5.3



Sl. 4.5.4

4° Tačka $(0,0)$ je singularna tačka krive $H(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5 = 0$. Jednačina (5) u ovom slučaju glasi $2\sin^2\alpha = 0$ i ima jedan koren $\alpha = 0$. Osa Ox je polutangenta obe grane krive u tački $(0,0)$; obe grane se nalaze s iste strane polutangente u dovoljno maloj okolini tačke $(0,0)$, sl. 3. Singularna tačka ovog tipa naziva se *povratnom tačkom druge vrste.*

5° U singularnoj tački $(0,0)$ krive $\Psi(x,y) = y^2 + x^2y - 2x^4 = 0$ dve grane se dodiruju, imaju zajedničku tangentu. Za svaku od grana krive tačka $(0,0)$ je obična (nije singularna), sl. 4. Ova singularna tačka krive naziva se *tačkom samododira.* ▲

4.6. GLATKE POVRŠI U PROSTORU $\mathbf{R}^n$

Dva skupa $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ nazivamo *homeomorfnim* ako postoji bijektivno preslikavanje $f\colon X \to Y$, tako da su preslikavanja f i f^{-1} neprekidna. Pri tom se preslikavanje f naziva *homeomorfizmom.*

Neka je $k \leqslant n$; skup $X \subset \mathbf{R}^n$ naziva se *k-dimenzionalnom elementarnom površi* (*elementarnom k-površi*) ako je homeomorfan otvorenoj lopti $E^k = \{\, x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| < 1 \,\}$.

Podsetimo se da pod okolinom tačke $p \in X$ u skupu $X \subset \mathbf{R}^n$ podrazumevamo svaki skup oblika $V = U \cap X$, gde je U okolina tačke p u prostoru $\mathbf{R}^n$.

Uvedimo još pojam proste k-dimenzionalne površi. Ako je skup $X \subset \mathbf{R}^n$ povezan i svaka njegova tačka ima okolinu u njemu koja je k-dimenzionalna elementarna površ, onda se za X kaže da je *k-dimenzionalna prosta površ* (*prosta k-površ*).

Primeri 4.6.1

1° Otvorena elipsa $\{\, (\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2 \mid \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 < 1 \,\}$ je elementarna 2-površ kao homeomorfna slika otvorenog kruga $\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$. Homeomorfizam je dat jednakošću $(\xi,\eta) = (ax, by)$, $x^2 + y^2 < 1$.

2° Otvorena polusfera $\{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0 \,\}$ je elementarna 2-površ. Homeomorfizam je dat paralelnom projekcijom polusfere na otvoreni krug $\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$.

3° Prostor $\mathbf{R}^n$ je elementarna n-površ. Homeomorfizam $f\colon E^n \to \mathbf{R}^n$ dat je jednakošću $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|} \operatorname{tg} \dfrac{\|x\|\pi}{2}$, $x \in E^n \setminus \{0\}$, $f(0) = 0$.

4° Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Grafik Γ funkcije f je elementarna 1-površ. Homeomorfizam h između $\mathbf{R}$ i Γ u ravni Oxy dat je u obliku

$$\mathbf{R} \ni (x,0) \overset{h}{\longmapsto} (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2.$$

5° Sfera $S^2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$ je prosta 2-površ, jer svaka tačka ima okolinu homeomorfnu otvorenom krugu E^2.

6° Površ kocke u prostoru $\mathbf{R}^3$ je prosta 2-površ. Naime, kocka je homeomorfna sferi S^2 (homeomorfizam se dobija projektovanjem tačaka sfere na tačke površi kocke iz zajedničkog centra), a ona je prosta 2-površ. ▲

Neka su X, Y dva skupa u prostoru $\mathbf{R}^n$ (ili, kako se često još kaže, dve geometrijske figure u prostoru $\mathbf{R}^n$). Preslikavanje $f\colon X \to Y$ naziva se *lokalno homeomorfnim* ako za svaku tačku $p \in X$ postoji okolina tačke p u skupu X, takva da je U homeomorfno sa $f(U)$.

Definicija 4.6.1

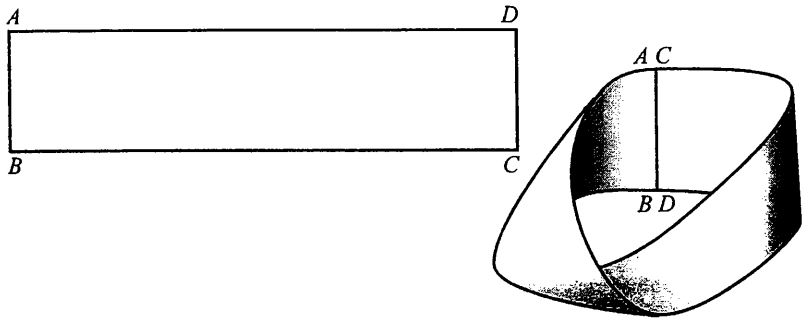
Za skup $X \subset \mathbf{R}^n$ kažemo da je *površ* ako predstavlja lokalno homeomorfnu sliku neke proste površi.

Lako se vidi da je elementarna površ i prosta, a prosta površ je površ u smislu definicije 1. Očito je da obratno ne mora da važi.

Primeri 4.6.2

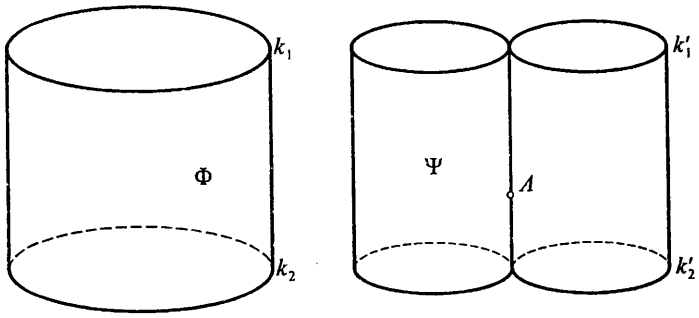
1° *Mebiusova* traka* (sl. 1) je 2-dimenzionalna površ (prosta 2-površ) u prostoru $\mathbf{R}^3$, koju možemo dobiti ako spojimo dve naspramne stranice AD i BC pravougaonika $ABCD$ tako da se suprotna temena poklope (A sa C, D sa B). Jedan način da se Mebiusova traka zada parametarski je pomoću preslikavanja $(-1/2,1/2)\times(-\pi/2,\pi+\pi/4)\to\mathbf{R}^3$ i $(-1/2,1/2)\times(\pi/2,2\pi+\pi/4)\to\mathbf{R}^3$ datih sa

$$(v,\theta)\mapsto\big(\cos\theta+v\sin(\theta/2)\cos\theta,\sin\theta+v\sin(\theta/2)\sin\theta,v\cos(\theta/2)\big).$$



Sl. 4.6.1

2° Na slici 2 je prikazana dvodimenzionalna površ Ψ, dobijena kao lokalno homeomorfna slika cilindra Φ, koji je prosta površ. Površ Ψ nije prosta (jer, na primer, tačka A nema okolinu homeomorfnu otvorenom krugu). Primetimo da skup tačaka na kružnicama k_1 i k_2, odnosno na krivim k_1' i k_2' nazivamo granicama površi Φ, odnosno Ψ. ▲



Sl. 4.6.2

* A. F. Möbius (1790–1868), nemački matematičar

Neka je Φ k-dimenzionalna površ u prostoru $\mathbf{R}^n$, nastala kao slika oblasti $G\subset\mathbf{R}^k$ funkcijom $f\colon G\to\mathbf{R}^n$. Preslikavanje f obično prikazujemo u obliku

$$\begin{aligned}x_1&=f_1(t_1,\dots,t_k)\\&\cdots\cdots\cdots\\x_n&=f_n(t_1,\dots,t_k).\end{aligned}\tag{1}$$

Sa $\vec r=(x_1,\dots,x_n)$ označimo vektor položaja proizvoljne tačke N površi Φ, a sa $t=(t_1,\dots,t_k)$ vektor položaja tačke $M\in G$, koja se preslikava u tačku N. Tada se površ Φ može prikazati vektorskom jednačinom $\vec r=\vec r(t)$, $t\in G$. Kažemo da je površ Φ parametrizovana parametrom $t=(t_1,\dots,t_k)\in G$.

Ako svaka tačka M površi Φ ima okolinu $U(M)$ za koju postoji m puta (neprekidno) diferencijabilna parametrizacija, onda se kaže da je Φ m puta (neprekidno) diferencijabilna površ. Neprekidno diferencijabilne površi nazivamo *glatkim*.

U praksi ćemo koristiti i *deo-po-deo glatke* površi. Njih uvodimo induktivno na sledeći način.

Tačku nazivamo nula-dimenzionalnom površi proizvoljne glatkosti. k-površ $\Phi\subset\mathbf{R}^n$ nazivamo deo-po-deo glatkom ako se iz nje može udaljiti konačno ili prebrojivo mnogo deo-po-deo glatkih površi dimenzija najviše $k-1$, tako da je ostatak unija glatkih k-površi.

Na primer, granica ugla i granica kvadrata su deo-po-deo glatke krive (1-površi). Granica kocke i granica pravog kružnog konusa u $\mathbf{R}^3$ su deo-po-deo glatke 2-površi.

Ubuduće ćemo pretpostavljati da funkcije kojima se površ prikazuje imaju sve potrebne neprekidne izvode.

Primeri 4.6.3

1° Površ Φ data je jednačinama

$$\begin{aligned}x_1&=f_1(t_1,\dots,t_{n-1})\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n&=f_n(t_1,\dots,t_{n-1}),\end{aligned}\tag{2}$$

pri čemu je Φ slika funkcije $f=(f_1,\dots,f_n)\colon G\to\mathbf{R}^n$, $G\subset\mathbf{R}^{n-1}$ i za proizvoljnu tačku $M\in G$ postoji okolina $U(M)$ homeomorfna sa $f(U)\subset\Phi$. Tada iz jednačina (2) možemo eliminisati parametre $t_1,\dots,t_{n-1}$ i dobiti jednačinu površi $f(U)\subset\Phi$ u obliku

$$F(x_1,\dots,x_n)=0.\tag{3}$$

Dakle, površ (2) može biti data i u implicitnom obliku (3).

2° Linearna jednačina $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$, $x_i\in\mathbf{R}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, u prostoru $\mathbf{R}^n$ predstavlja hiperravan. Presek ove hiperravni sa potprostorom $Ox_ix_jx_k$ ($i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ fiksirani) je ravan $a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k+b=0$ ($x_s=0$ za $s\neq i,j,k$).

3° Parametarske jednačine površi u prostoru $\mathbf{R}^n$ imaju oblik

$$\begin{aligned}
x_1 &= a\cos\varphi_1, && 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\\
x_2 &= a\sin\varphi_1\cos\varphi_2, && 0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi,\\
x_3 &= a\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, && 0 \leqslant \varphi_3 \leqslant \pi,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= a\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, && 0 \leqslant \varphi_{n-1} < 2\pi,\\
x_n &= a\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}$$

gde je $a > 0$ fiksirano. Kvadriranjem i sabiranjem dobija se jednačina sfere $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$.

4° Neka je data površ $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi za egzistenciju funkcije $x_i = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Tada se kaže da je površ $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eksplicitno data jednačinom $x_i = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Primetimo da se tačka $(x_1, \ldots, x_n)$ površi $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ naziva *običnom* ako je bar jedan od parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, različit od nule u njoj. Ako je $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ za $i = 1, \ldots, n$, onda je tačka $(x_1, \ldots, x_n)$ *singularna*. ▲

4.7. TANGENTNA RAVAN I NORMALA

U ovom i narednim odeljcima primenićemo metode diferencijalnog računa na neke probleme površi u prostoru $\mathbf{R}^3$.

Neka je Φ data površ i $M_0(x_0, y_0, z_0)$ proizvoljna tačka na njoj. Ako postoji ravan α koja sadrži tačku M_0 i ima svojstvo da ugao φ između normale ravni α i proizvoljne sečice M_0M površi, $M \in \Phi$, teži $\pi/2$ kad M teži M_0, onda se ravan α naziva *tangentnom ravni* površi Φ u tački M_0.

Uočimo skup $\mathcal{T}$ svih krivih linija koje se nalaze na površi Φ, koje prolaze kroz tačku M_0 i imaju tangentu u tački M_0. Prema gornjoj definiciji, tangentna ravan predstavlja uniju tangenata krivih familije $\mathcal{T}$.

Pretpostavimo da je površ Φ data u obliku $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, gde je f diferencijabilna funkcija. Pokažimo da tangentna ravan postoji u proizvoljnoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ površi, gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Uočimo tačke $M_0'(x_0, y_0)$ i $M'(x, y)$ u skupu D. Za diferencijabilnu funkciju $z = f(x, y)$ važi

$$z - z_0 = f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \tag{1}$$

gde je $f_x^0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f_y^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. S druge strane,

$$z - z_0 = f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) \tag{2}$$

je jednačina ravni kroz tačku (x_0, y_0, z_0). Ugao φ između normale na ovu ravan i sečice površi Φ kroz tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i $M(x, y, z)$ dat je jednakošću

$$\cos\varphi = \frac{f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{(f_x^0)^2 + (f_y^0)^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Iz (1) sledi da je brojilac poslednjeg razlomka jednak $o(\rho)$, $\rho \to 0$, pa je

$$|\cos\varphi| \leqslant \frac{|o(\rho)|}{\rho\sqrt{(f_x^0)^2 + (f_y^0)^2 + 1}} \to 0, \quad \rho \to 0.$$

Dakle je (2) jednačina tangentne ravni. Označavajući tekuće koordinate sa X, Y, Z, a (x_0, y_0, z_0) sa (x, y, z) i stavljajući $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$, imaćemo jednačinu tangentne ravni u obliku

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{2'}$$

Definišimo *normalu* površi Φ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kao normalu tangentne ravni u toj tački. Za jednačinu normale imaćemo

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}. \tag{3}$$

Ako je glatka površ Φ data jednačinom $F(x, y, z) = 0$ i u tački $M(x, y, z)$ je bar jedan od parcijalnih izvoda funkcije F različit od nule, na primer $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, onda je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$, pa je jednačina tangentne ravni u tački M

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0, \tag{4}$$

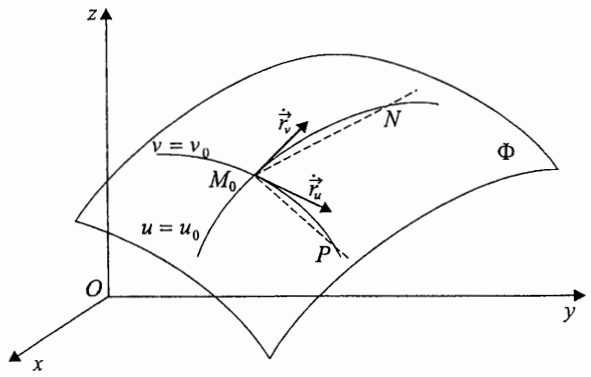
a normale

$$\frac{X - x}{\partial F/\partial x} = \frac{Y - y}{\partial F/\partial y} = \frac{Z - z}{\partial F/\partial z}. \tag{5}$$

Posmatrajmo glatku 2-površ Φ datu jednačinom $\vec{r} = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, $(u, v) \in G \subset \mathbf{R}^2$. Neka je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ fiksirana proizvoljna tačka na površi Φ, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$. Krive linije

$$x = x(u_0, v),\ y = y(u_0, v),\ z = z(u_0, v) \quad \text{i} \quad x = x(u, v_0),\ y = y(u, v_0),\ z = z(u, v_0)$$

nalaze se na površi Φ i prolaze kroz tačku M_0, sl. 1. One se nazivaju *koordinatnim linijama*. Uočimo krivu $u = u_0$ i na njoj tačku N. Granični položaj sečice M_0N, kad tačka N teži tački M_0, jeste tangenta krive $u = u_0$ u tački M_0. Slično, granični položaj sečice M_0P, kad tačka P teži tački M_0 ostajući na krivoj $v = v_0$,



Sl. 4.7.1

jeste tangenta krive $v = v_0$ u tački M_0. Kako ove dve tangente leže u tangentnoj ravni u tački M_0, to je normala tangentne ravni paralelna vektoru $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (pretpostavljaćemo da je taj vektorski proizvod različit od nule).

Dakle, vektor normale tangentne ravni u proizvoljnoj tački (x, y, z) možemo napisati u obliku

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right),$$

gde su sa $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ označeni kofaktori matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

dobijeni precrtavanjem njene prve, druge, odnosno treće kolone. Ta matrica je, ustvari, transponovana matrica Jakobijeve matrice preslikavanja $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$; uslov $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ znači da je pretpostavljeno da je ona ranga 2. Prema tome, jednačine tangentne ravni i normale površi su

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(X - x) + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(Y - y) + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(Z - z) = 0, \tag{6}$$

odnosno

$$\frac{X - x}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{Y - y}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{Z - z}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}. \tag{7}$$

Primer 4.7.1

Površ je data parametarskim jednačinama $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u\operatorname{ctg}\alpha$, $u \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant v < 2\pi$ (α fiksirano, $0 < \alpha < \pi/2$). Nađimo jednačine tangentne ravni i normale u proizvoljnoj tački (u_0, v_0), $u_0 \neq 0$.

Parcijalni izvodi u tački (u_0, v_0) su:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v_0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -u_0 \sin v_0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u_0 \cos v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Odatle je

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = -u_0 \cos v_0 \operatorname{ctg}\alpha, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -u_0 \sin v_0 \operatorname{ctg}\alpha, \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = u_0,$$

pa je jednačina tangentne ravni

$$\cos v_0 \cdot x + \sin v_0 \cdot y - \operatorname{tg}\alpha \cdot z = 0,$$

a jednačine normale su

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{\cos v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{\sin v_0} = \frac{z - u_0 \operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Eliminisanjem parametara u, v iz datih jednačina površi dobija se jednačina $x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot z^2$. Data površ je konus, a uslovom $u_0 \neq 0$ je iz razmatranja isključen njegov vrh. ▲

4.8. PRVA KVADRATNA FORMA POVRŠI

Neka je $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, data 2-površ u $\mathbf{R}^3$. Ako parametri u i v zavise od nekog parametra t, $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in \Delta \subset \mathbf{R}$, onda raznim vrednostima parametra t odgovaraju vektori položaja tačaka na površi koje pripadaju krivoj

$$\vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big). \tag{1}$$

Ako su funkcije $\vec{r}$, u i v diferencijabilne, vektor tangente krive (1) u proizvoljnoj tački dat je jednakošću

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Iz (2) se vidi da vektor tangente krive u nekoj tački na površi predstavlja linearnu kombinaciju vektora tangenata koordinatnih linija u datoj tački.

Nađimo formulu za izračunavanje dužine luka s krive (1) za vrednosti parametra t iz nekog segmenta $[\alpha, \beta]$.

Najpre primetimo da iz relacije (6) odeljka 1 i jednakosti $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}_u\,du + \dot{\vec{r}}_v\,dv$ sledi

$$ds^2 = \dot{\vec{r}}_u{}^2\,du^2 + 2\dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v\,du\,dv + \dot{\vec{r}}_v{}^2\,dv^2.$$

Uvedimo oznake $\dot{\vec{r}}_u{}^2 = E$, $\dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v = F$, $\dot{\vec{r}}_v{}^2 = G$. Sada za ds^2 dobijamo izraz

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{3}$$

Kako se dužina luka izračunava po formuli $s = \int_\alpha^\beta ds$, to je prema (3), a imajući u vidu zavisnost $u = u(t)$, $v = v(t)$,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{4}$$

Kvadratna forma $\varphi(du, dv) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ na desnoj strani jednakosti (3) naziva se *prvom kvadratnom formom* površi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, a njeni koeficijenti E, F i G još i *Gausovim koeficijentima* te površi. Iz (4) se vidi da dužina luka krive na površi zavisi od kvadratne forme površi i jednačina $u = u(t)$, $v = v(t)$.

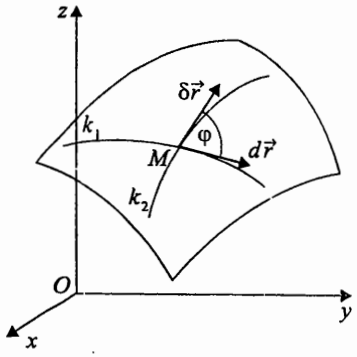
Primeri 4.8.1

1° Jednačina sfere ima oblik $\vec{r}(\theta, \varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, pa je $\dot{\vec{r}}_\theta = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, 0)$, $\dot{\vec{r}}_\varphi = (a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\varphi)$. Odavde je $E = a^2\sin^2\varphi$, $F = 0$, $G = a^2$ i prva kvadratna forma ima oblik

$$ds^2 = a^2(\sin^2\varphi\,d\theta^2 + d\varphi^2).$$

2° Jednačina površi je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. Napišimo je u obliku $\vec{r}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$. Vidi se da je $\dot{\vec{r}}_x = (1, 0, p)$, $\dot{\vec{r}}_y = (0, 1, q)$, odakle sledi $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, kao i

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2. \quad \blacktriangle$$



Sl. 4.8.1

Uočimo dve proizvoljne krive k_1 i k_2 na površi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, koje se seku u tački M površi. Izračunajmo ugao φ između krivih k_1 i k_2. Imajući u vidu (2), vektor tangente krive k_1 označimo sa $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}_u du + \dot{\vec{r}}_v dv$, a krive k_2 sa $\delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}_u \delta u + \dot{\vec{r}}_v \delta v$ (različite oznake za diferencijale koristimo zato da bismo razlikovali pravce tangenata krivih). Za ugao φ između tangenata, sl. 1, važi jednakost

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}| \cdot |\delta\vec{r}|}.$$

Uzimajući u obzir da je

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \quad |\delta\vec{r}| = \delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2},$$
$$d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = (\dot{\vec{r}}_u du + \dot{\vec{r}}_v dv) \cdot (\dot{\vec{r}}_u \delta u + \dot{\vec{r}}_v \delta v) = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v,$$

imamo

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{5}$$

Primetimo da se iz (5) vidi da je za izračunavanje ugla između krivih na površi dovoljno znati prvu kvadratnu formu površi, a ne i jednačinu te površi.

Primer 4.8.2

Izračunajmo ugao između koordinatnih linija površi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ u proizvoljnoj tački njihovog preseka.

Iz $v = \text{const}$, odnosno $u = \text{const}$, sledi $du \neq 0$, $dv = 0$, odnosno $\delta u = 0$, $\delta v \neq 0$, pa (5) daje

$$\cos\varphi = \frac{F\,du\,\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Specijalno, ako je $F \equiv 0$, onda su koordinatne linije u svakoj tački površi međusobno ortogonalne. Takva mreža koordinatnih linija se naziva ortogonalnom. ▲

4.9. SINGULARNE TAČKE POVRŠI U PROSTORU $\mathbf{R}^3$

Posmatrajmo tačke površi Φ čija je jednačina $F(x, y, z) = 0$, gde je funkcija F dvaput diferencijabilna. Neka je tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ na toj površi singularna, tj. neka je $F_x^0 = \dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) = 0$, $F_y^0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 0$ i $F_z^0 = \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$. Tada u tački M_0 ne postoji tangentna ravan. Kako izgleda površ Φ u okolini tačke M_0?

Stav 4.9.1

Ako se u singularnoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ površi $F(x, y, z) = 0$ ne anuliraju svi parcijalni izvodi drugog reda funkcije F, onda tangente svih krivih, koje leže na površi i prolaze kroz tačku M_0, pripadaju jednom konusu (stvarnom, imaginarnom, paru ravni ili pravih).

Dokaz.

Za proizvoljnu krivu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ koja prolazi kroz tačku M_0 i nalazi se na površi $F(x, y, z) = 0$ važi jednakost

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0. \tag{1}$$

Pri tom postoji t_0, tako da je $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Iz (1) imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

i zatim, ponovnim diferenciranjem po t i zamenom t sa t_0,

$$(2)\quad F^0_{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + F^0_{y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 + F^0_{z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 + 2\left(F^0_{xy}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + F^0_{xz}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 + F^0_{yz}\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right) + F^0_x\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 + F^0_y\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 + F^0_z\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = 0,$$

pri čemu je $F^0_x = F^0_y = F^0_z = 0$. Jednačina tangente krive $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ u tački M_0 ima oblik

$$(3)\quad \frac{x - x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0}.$$

Eliminisanjem parametara $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ iz jednačina (2) i (3) dobija se jednačina

$$(4)\quad F^0_{x^2}(x-x_0)^2 + F^0_{y^2}(y-y_0)^2 + F^0_{z^2}(z-z_0)^2 + 2F^0_{yz}(y-y_0)(z-z_0) + 2F^0_{xz}(x-x_0)(z-z_0) + 2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0) = 0$$

koja predstavlja konus. ■

Primeri 4.9.1

1° Konus $x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0$ ima tačku $(0,0,0)$ kao singularnu. Jednačina (4) u ovoj tački ima oblik $x^2 + y^2 = k^2z^2$.

2° Singularna tačka površi $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ je koordinatni početak. Jednačina (4) je $x^2 + y^2 = 0$, što predstavlja tačku (odnosno par imaginarnih pravih).

3° Singularne tačke površi $z^3 + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 3z = 0$ nalaze se u skupu rešenja sistema jednačina $4x = 0$, $4y - 4 = 0$, $3z^2 - 3 = 0$. Tačka $(0,1,1)$ ne nalazi se na površi, a tačka $(0,1,-1)$ je singularna tačka date površi. Jednačina (4) ima oblik $2x^2 + 2(y-1)^2 = 3(z+1)^2$. ▲

4.10. KLASIFIKACIJA TAČAKA NA POVRŠI

Ispitivanje date površi Φ u okolini neke tačke M te površi uspešno se vrši ispitivanjem ponašanja linija na površi Φ koje prolaze kroz tačku M. Obično se ispituju one linije koje se dobijaju presekom površi Φ sa ravni koja prolazi kroz tačku M.

Neka je Φ dvaput neprekidno diferencijabilna površ, a Γ dvaput neprekidno diferencijabilna kriva na površi Φ. Pretpostavimo da je površ Φ data funkcijom

$$(1)\quad z = f(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

a kriva Γ vektorskom funkcijom

$$(2)\quad \vec{r} = \big(x(s), y(s), z(s)\big).$$

Uočimo tačku $M_0(x,y,z)$ na krivoj Γ. Jedinični normalni vektor $\vec{n}$ tangentne ravni površi Φ u tački M_0 dat je sa (v. (2′), odeljak 7)

$$\vec{n} = \left(\frac{-p_0}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}, \frac{-q_0}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}\right).$$

Jedinični vektor $\vec{\nu}$ glavne normale krive Γ u tački M dat je sa (v. (1), odeljak 4)

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|} = R\vec{r}''(s) = R\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right).$$

Ugao θ između vektora $\vec{n}$ i $\vec{\nu}$ dat je jednakošću

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{-p_0d^2x - q_0d^2y + d^2z}{ds^2\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}.$$

Kako se kriva Γ nalazi na površi Φ i za diferencijal dz imamo $dz = p\,dx + q\,dy$, to iz ove jednakosti sledi

$$d^2z = r_0dx^2 + 2s_0dxdy + t_0dy^2 + p_0d^2x + q_0d^2y,$$

gde je označeno $r_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (svi izvodi su računati u tački M_0). Za ugao θ dobija se jednakost

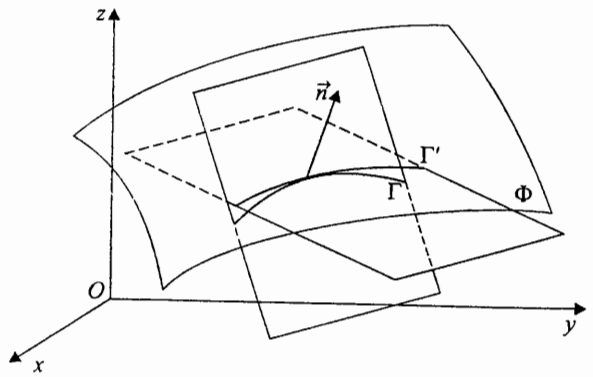
$$(3)\quad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r_0dx^2 + 2s_0dxdy + t_0dy^2}{ds^2\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}} = \frac{r_0a^2 + 2s_0ab + t_0b^2}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}},$$

gde je stavljeno $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$. Primetimo da a i b predstavljaju kosinuse uglova koje tangenta krive Γ u tački M_0 obrazuje sa x-osom, odnosno y-osom (v. (5), odeljak 2).

Pretpostavimo da se oskulatorna ravan krive Γ ne poklapa sa tangentnom ravni površi Φ u tački M_0. Tada je $\cos\theta \neq 0$. Iz jednakosti (3) sledi da sve krive na površi Φ, koje u tački M_0 imaju zajedničku oskulatornu ravan sa krivom Γ, imaju u tački M_0 jednake krivine; ta zajednička krivina je $1/R$. Ako se oskulatorna ravan poklapa sa tangentnom ravni, ovaj zaključak ne važi.

Ravan presek površi Φ koji prolazi kroz tačku $M_0 \in \Phi$ naziva se *normalnim* ako ravan preseka sadrži normalu površi u tački M_0.

Neka je Γ normalan presek površi Φ kroz tačku M_0, a Γ' je proizvoljan ravan presek površi Φ koji sadrži tangentu krive Γ u tački M_0, sl. 1. Za obe krive Γ i Γ', veličine $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 su jednake. S druge strane, oskulatorna ravan normalnog preseka Γ sadrži normalu površi Φ u tački M_0. Odavde sledi da je $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$ (u zavisnosti od toga da li glavna normala krive Γ sa z-osom zaklapa oštar ili tup ugao).



Sl. 4.10.1

Ako sa $1/R$ označimo krivinu normalnog preseka Γ, a sa $1/R'$ krivinu preseka Γ', onda iz jednakosti (3) sledi

$$\pm\frac{1}{R}=\frac{\cos\theta}{R'}, \tag{4}$$

gde je θ ugao između normalnog vektora $\vec{n}$ tangentne ravni površi Φ i vektora $\vec{\nu}$ glavne normale krive Γ' u tački M_0. Drugačije rečeno, iz jednakosti (4) sledi

Teorema 4.10.1 *(Menijeova* teorema)*

Krivina $1/R'$ krive Γ' na površi Φ i krivina $1/R$ normalnog preseka Γ, čija ravan prolazi kroz tangentu krive Γ' u tački M površi Φ, vezani su jednakošću (4)*, gde je θ ugao između vektora normale površi i vektora glavne normale krive Γ' u tački M.* ■

Uočimo proizvoljan normalan presek Γ na površi Φ, jednačine (1), u tački $M(x,y,z)$ te površi. Umesto $\pm R$, kao što smo stavili u jednakosti (4), stavimo R, podrazumevajući da R može uzimati pozitivnu vrednost (ako vektor glavne normale normalnog preseka Γ sa z-osom zaklapa oštar ugao), kao i negativnu vrednost (ako vektor glavne normale krive Γ zaklapa tup ugao sa z-osom). Tada jednakost (3), za normalan presek Γ, glasi

$$\frac{1}{R}=\frac{r_0a^2+2s_0ab+t_0b^2}{\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}. \tag{5}$$

Prenesimo koordinatni početak u tačku M i osu Oz upravimo u smeru vektora $\vec{n}$ normale površi Φ u tački M. Radi jednostavnosti, jednačinu površi u novom koordinatnom sistemu napišimo ponovo u obliku $z=f(x,y)$. Za jednačinu površi Φ i normalan presek Γ u ovom slučaju važi:

* J. B. M. Meusnier (1754–1793), francuski matematičar

1° ugao između vektora $\vec{n}$ normale površi i vektora $\vec{\nu}$ glavne normale krive Γ je 0 ili π;

2° $p_0=0$, $q_0=0$;

3° ako sa φ označimo ugao između tangente krive Γ i ose Ox, onda je $a^2+b^2=1$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$.

Jednakost (5) postaje

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=r_0\cos^2\varphi+2s_0\cos\varphi\sin\varphi+t_0\sin^2\varphi\\&=\frac{r_0+t_0}{2}+\frac{r_0-t_0}{2}\cos2\varphi+s_0\sin2\varphi.\end{aligned} \tag{6}$$

Ako u tački M (koja se nalazi u koordinatnom početku) posmatramo različite normalne preseke površi Φ, onda se ugao φ menja, pa se menja i krivina $1/R$. Potražimo ekstremne vrednosti krivine. Iz jednačine $(1/R)'=0$ dobijamo

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2s_0}{r_0-t_0}. \tag{7}$$

U intervalima $(\pi/4,3\pi/4)$ i $(3\pi/4,5\pi/4)$ funkcija $\operatorname{tg}2\varphi$ raste od $-\infty$ do ∞, pa jednačina (7) ima u ovim intervalima po jedan koren, φ_1 odnosno φ_2, tako da je $\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$, za $r_0\neq t_0$. Lako se pokazuje da u jednom od tih korena funkcija (6) ima maksimum, a u drugom minimum. Označimo te ekstremne vrednosti sa $\frac{1}{R}(\varphi_1)=\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R}(\varphi_2)=\frac{1}{R_2}$. Krivine $\frac{1}{R_1}$ i $\frac{1}{R_2}$ nazovimo *glavnim krivinama.*

Izvršimo rotaciju koordinatnog sistema oko ose Oz, usmeravajući novu x-osu tako da zaklapa ugao φ_1 sa starom x-osom, a nova y-osa zaklapa ugao φ_2 sa starom x-osom. Jednačinu površi Φ, jednostavnosti radi, pišimo u obliku $z=f(x,y)$. Jednačina (7) sada ima oblik $\operatorname{tg}2\varphi=0$, pa zaključujemo da je $s_0=0$. Jednakost (6) ima oblik

$$\frac{1}{R}=r_0\cos^2\varphi+t_0\sin^2\varphi.$$

Iz ove jednakosti za $\varphi=0$, odnosno za $\varphi=\pi/2$, dobijamo $r_0=1/R_1$, $t_0=1/R_2$, pa je

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{8}$$

Formula (8) je *Ojlerova formula.* Ona daje vezu između glavnih krivina i krivine $1/R$ onog normalnog preseka čija ravan zaklapa ugao φ sa ravni koja seče površ po krivoj sa jednom od glavnih krivina.

U jednakosti (8) umesto φ stavimo $\varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}$. Ako se sa $\frac{1}{R'}$ označi odgovarajuća krivina, dobija se

$$\frac{1}{R'}=\frac{\sin^2\varphi}{R_1}+\frac{\cos^2\varphi}{R_2}.$$

Sabiranjem ove jednakosti i jednakosti (8) dobija se

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}. \tag{9}$$

Stav 4.10.1

Zbir krivina $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ *dva uzajamno upravna normalna preseka stalan je broj i iznosi* $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. ■

Zbir $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ naziva se *srednjom krivinom* površi u datoj tački.

Na osnovu znakova glavnih krivina $1/R_1$ i $1/R_2$ vrši se klasifikacija tačaka dvaput diferencijabilnih površi. Naime, tačka je:

1° eliptička ako je $\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}>0$;

2° hiperbolička ako je $\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}<0$;

3° parabolička ako je $\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}=0$.

Primetimo da u slučaju hiperboličke tačke, zbog neprekidnosti funkcije $1/R$ (v. (8)), postoje dva normalna preseka čija krivina je jednaka nuli. U slučaju, pak, paraboličke tačke, jedna od glavnih krivina jednaka je nuli. Određenosti radi, neka je $1/R_2=0$. Jednačina (8) postaje $\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}$. Vidi se da postoji jedan normalan presek sa krivinom jednakom nuli, dok ostali normalni preseci imaju krivine istog znaka.

Na koji način ispitati vrstu tačke na površi $z=f(x,y)$, a da se ne vrši transformacija koordinatnog sistema?

Uočimo proizvoljnu tačku $M(x,y,z)$ na površi Φ jednačine $z=f(x,y)$. Za proizvoljan normalan presek Γ ove površi važi jednakost

$$\frac{1}{R}=\frac{r_0dx^2+2s_0dxdy+t_0dy^2}{ds^2\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}. \tag{5'}$$

Znak krivine $1/R$ preseka Γ zavisi od znaka kvadratne forme $F(dx,dy)=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2$ (*druga kvadratna forma površi*).

1° Neka je $r_0t_0-s_0^2>0$. Kvadratna forma F ima stalan znak. Tačka M je eliptička.

2° Neka je $r_0t_0-s_0^2<0$. Kvadratna forma F menja znak. Tačka M je hiperbolička.

3° Neka je $r_0t_0-s_0^2=0$. Kvadratna forma F zadržava isti znak, osim u jednom slučaju, kada je jednaka nuli. Tačka M je parabolička.

Primeri 4.10.1

1° Za proizvoljnu tačku $M(x,y,z)$, $z\neq 0$, elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ imamo $r_0=-\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2x^2}{a^2z^2}\right)$, $s_0=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$, $t_0=-\frac{c^2}{b^2z}\left(1+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}\right)$, pa je

$$r_0t_0-s_0^2=\frac{c^4}{a^2b^2z^2}\left(1+\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}\right).$$

Svaka tačka elipsoida za $z\neq 0$ je eliptička. Lako se pokazuje da su i tačke elipsoida u kojima je $z=0$ takođe eliptičke.

2° Za hiperbolički paraboloid $z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}$ imamo $r_0=\frac{1}{a^2}$, $s_0=0$, $t_0=-\frac{1}{b^2}$, pa je $r_0t_0-s_0^2=-\frac{1}{a^2b^2}$. Dakle, svaka tačka ovog paraboloida je hiperbolička.

3° Eliptički cilindar dat je jednačinom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. U proizvoljnoj tački $M(x,y,z)$, $z\neq 0$, je $r_0=-\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2x^2}{z}\right)$, $s_0=0$, $t_0=0$, pa je $r_0t_0-s_0^2=0$. Tačka M je parabolička. ▲

ZADACI

1. Neka je $\vec{r}(t)$ vektorska funkcija u prostoru $\mathbf{R}^n$. Ako je ona neprekidno diferencijabilna na segmentu $[t_0,t_1]$, onda je dužina luka s hodografa ove funkcije na $[t_0,t_1]$ data integralom

$$s=\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt.$$

Dokazati.

2. Parametrizovati *hiperboličku zavojnicu* $x=a\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$, $z=at$, $t\in\mathbf{R}$, pomoću prirodnog parametra.

3. Vektor položaja $\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, $t\in\Delta\subset\mathbf{R}$, glatke krive Γ ima drugi izvod $\ddot{\vec{r}}(t)$. Naći koordinate centra krivine u proizvoljnoj tački krive Γ.

4. Naći formulu za krivinu ako je jednačina krive u ravni data u polarnim koordinatama.

5. Za krive $y=f(x)$ i $y=g(x)$ kaže se da u tački x_0 imaju *dodir najmanje reda* n ako je $f(x)-g(x)=o((x-x_0)^n)$ za $x\to x_0$.

1° Ako su funkcije f i g n puta neprekidno diferencijabilne u tački x_0, onda krive $y=f(x)$ i $y=g(x)$ u tački x_0 imaju dodir najmanje reda n ako i samo ako je $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0)=g'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$. Dokazati.

2° Dokazati da krug krivine dvaput neprekidno diferencijabilne krive ima sa njom u datoj tački dodir najmanje reda 2.

3° Dokazati da krug krivine u temenima krivih drugog reda ima s tim krivim dodir trećeg reda.

6. Neka se tačka dodira krive i tangente nalazi u koordinatnom početku O, tangenta je osa Ox, a osa Oy je usmerena prema centru krivine. Ako se poluprečnik krivine označi sa R, ordinata tačke na krivoj sa y_1, a ordinata centra krivine sa y_2, onda se y_1 i y_2 mogu na sledeći način aproksimirati u okolini koordinatnog početka:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R} + ax^3 + \cdots, \qquad y_2 = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \cdots,$$

gde je a neki realan broj. Dokazati.

7. Naći evolutu

1° astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

2° *traktrise* $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$;

3° logaritamske spirale $r = ae^{k\varphi}$.

8. Ako je kriva k_2 evoluta krive k_1, kaže se da je kriva k_1 *evolventa* krive k_2. Dokazati da je kriva $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ evolventa kruga $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Naći evolutu krive date jednačinom $F(x, y) = 0$.

10. Ispitati singularnu tačku *Dioklesove* cisoide* $x(x^2 + y^2) = ky^2$.

11. *Konhoida* date krive je geometrijsko mesto krajeva duži stalne dužine nanesenih na produžetke vektora položaja tačaka krive. Naći jednačinu konhoide kruga u polarnom koordinatnom sistemu ako se pol nalazi na krugu (*Paskalov** puž*). Prelaskom na pravougli koordinatni sistem ispitati singularnu tačku Paskalovog puža.

12. Vivijanijeva kriva (v. primer 1.1.3°) data je kao presek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ i cilindra $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$.

1° Pokazati da se ta kriva može parametrizovati pomoću $x = R(1 + \cos t)$, $y = R \sin t$, $z = 2R \sin \dfrac{t}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$.

2° Pokazati da je njena krivina data sa $K = \sqrt{13 + 3\cos t}\,/R(3 + \cos t)^{3/2}$, a torzija sa $\varkappa = -6 \cos \dfrac{t}{2}\,/R(13 + 3\cos t)$.

3° Naći vektore fundamentalnog triedra u tačkama samopresecanja krive ($t = 0$, $t = 2\pi$) i u tačkama u kojima je $\varkappa = 0$ ($t = \pi$, $t = 3\pi$).

* Diokles (II vek p. n. e.), starogrčki matematičar

** B. Pascal (1623–1662), francuski matematičar

13. Dokazati da se kriva $\vec{r} = e^{kt}(a \cos t\,\vec{i} + a \sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k})$ nalazi na konusu $b^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2$.

14. 1° Naći uslov dodira ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ i površi $xyz = a^3$.

2° Dokazati da tangentne ravni površi $xyz = a^3$ s koordinatnim ravnima obrazuju tetraedre konstantne zapremine.

15. 1° Napisati parametarske jednačine površi koja nastaje rotacijom krive $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$, $u \in \Delta \subset \mathbf{R}$, oko ose Oz.

2° Dokazati da sve normale ove površi seku osu Oz.

3° Dokazati da prva kvadratna forma ove površi glasi $\big(f'^2(u) + g'^2(u)\big)\,du^2 + f^2(u)\,dv^2$.

16. Ako sve normale neke površi seku jednu pravu, onda je površ obrtna. Dokazati.

17. Neka je na nekoj površi zadata familija krivih linija. Krive na površi koje svaku krivu iz familije seku pod pravim uglom, nazivaju se *ortogonalnim trajektorijama* date familije. Naći ortogonalne trajektorije pravolinijskih generatrisa paraboloida $z = kxy$.

5. VIŠESTRUKI INTEGRALI

U M.A.I posmatrani su određeni integrali, definisani na nekom segmentu $[a,b] \subset \mathbf{R}$, kao i niz primena određenih integrala. Metode koje su tipične za primenu određenih integrala na segmentu realne prave pokazuju se vrlo korisnim kod niza problema vezanih za „segmente" u ravni $\mathbf{R}^2$, odnosno prostoru $\mathbf{R}^3$ ili pak, uopšte, u prostoru $\mathbf{R}^n$. Naime, u cilju generalizacije Rimanovog integrala definiše se segment u prostoru $\mathbf{R}^n$, zatim podela toga segmenta i mera segmenta. Dalje se uvode merljivi skupovi u $\mathbf{R}^n$ i najzad određeni integral po segmentu, kao i po proizvoljnom merljivom skupu. Primene idu u pravcu definisanja i nalaženja zapremine geometrijskih tela, masa fizičkih tela, momenata inercije i dr.

5.1. ŽORDANOVA MERA

Neka su $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ dve tačke u prostoru $\mathbf{R}^n$. Skup $I_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, n \}$ nazvaćemo *segmentom* u prostoru $\mathbf{R}^n$. Primetimo da za $n = 2$, segment je pravougaonik, za $n = 3$ je kvadar; segment u prostoru $\mathbf{R}^n$ je *pravougli n-paralelepiped.*

Mera $\mu I_{a,b}$ segmenta $I_{a,b}$ je broj $\mu I_{a,b} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

PRIMERI 5.1.1

1° Segment $I_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^2 \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,2 \}$ je pravougaonik u ravni $\mathbf{R}^2$; mera $\mu I_{a,b}$ je površina pravougaonika.

2° Segment $I_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,2,3 \}$ je pravougli paralelepiped u prostoru $\mathbf{R}^3$. Mera $\mu I_{a,b}$ je zapremina paralelepipeda. ▲

Primetimo da je mera $\mu I_{a,b}$ segmenta $[a,b] \subset \mathbf{R}$ jednaka $b - a$.

Neka su $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, segmenti na $\mathbf{R}$. Tada je $I_{a,b} = \prod_{i=1}^{n} I_i$, gde je $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$. Na segmentu I_i uočimo podelu $P_i = \{x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{n_i}\}$, $i = 1, \dots, n$. Dekartov proizvod

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in P_i, i = 1, \dots, n \}$$

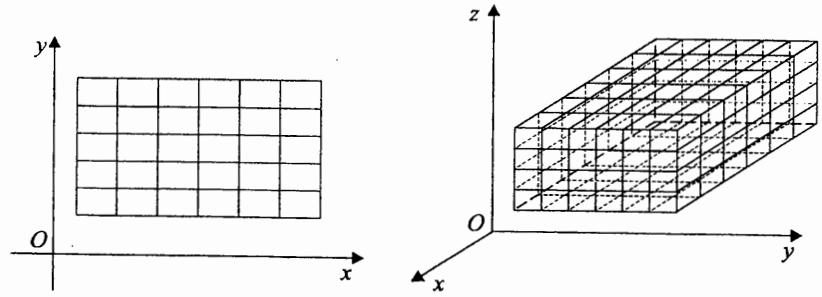
je *podela* segmenta $I_{a,b}$. Ta podela određuje segmente

$$[x_1^{j_1}, x_1^{j_1+1}] \times \cdots \times [x_n^{j_n}, x_n^{j_n+1}]$$

koje nazovimo *podsegmentima* u odnosu na segment $I_{a,b}$. Podelu P nekog segmenta $I_{a,b}$ još ćemo predstavljati u obliku skupa podsegmenata $I^1, \dots, I^k$, tj.

$$P = \{I^1, \dots, I^k\}.$$

Na slici 1 prikazani su segmenti i njihove podele u prostorima $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$.



Sl. 5.1.1

Skup $\mathcal{P}(I)$ svih podela segmenta $I \subset \mathbf{R}^n$ može se urediti. Za dve podele P i P' segmenta I kazaćemo da je P' *finija* od P, odnosno da je P *grublja* od P', i pisati $P \prec P'$, odnosno $P' \succ P$, ako je svaki podsegment $I^{k_i} \in P'$ podskup nekog podsegmenta $I^{m_j} \in P$, $I^{k_i} \subset I^{m_j}$. Lako je videti da za svake dve podele P', $P'' \in \mathcal{P}(I_{a,b})$ postoji podela $P \in \mathcal{P}(I_{a,b})$, tako da je $P' \prec P$, $P'' \prec P$.

Posmatrajmo sada proizvoljne ograničene skupove u prostoru $\mathbf{R}^n$. Neka je A jedan takav skup, koji je sadržan u segmentu I. Setimo se da je $x \in \mathbf{R}^n$ unutrašnja tačka skupa A ako ona pripada tom skupu zajedno sa nekom svojom okolinom; x je spoljašnja tačka skupa A ako je unutrašnja tačka skupa $\mathbf{R}^n \setminus A$; x je granična tačka skupa A ako nije ni njegova unutrašnja ni spoljašnja tačka. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A označavaćemo sa A°, a skup svih graničnih tačaka sa ∂A.

Uočimo proizvoljnu podelu P segmenta I koji sadrži dati ograničeni skup $A \subset \mathbf{R}^n$. Sa $\underline{\omega}_P(A)$ označimo uniju svih onih podsegmenata podele P koji se sastoje samo od unutrašnjih tačaka skupa A, a sa $\overline{\omega}_P(A)$ uniju svih podsegmenata koji sadrže bar neku tačku skupa $\overline{A}$. Zbir mera svih podsegmenata iz $\underline{\omega}_P(A)$, odnosno $\overline{\omega}_P(A)$, označićemo sa $|\underline{\omega}_P(A)|$, odnosno $|\overline{\omega}_P(A)|$ (kraće $|\underline{\omega}_P|$, odnosno $|\overline{\omega}_P|$, ako se zna o kom se skupu A radi).

Lako se vidi da iz $P \prec P'$ sledi $|\underline{\omega}_P| \leqslant |\underline{\omega}_{P'}|$, odnosno $|\overline{\omega}_P| \geqslant |\overline{\omega}_{P'}|$. Za dve proizvoljne podele P', P'' važi $|\underline{\omega}_{P'}| \leqslant |\overline{\omega}_{P''}|$. Dakle postoje konačni

$$\sup_P |\underline{\omega}_P(A)| = \mu_i A, \tag{1}$$

$$\inf_P |\overline{\omega}_P(A)| = \mu_e A. \tag{2}$$

Broj $\mu_i A$ nazivamo *unutrašnjom*, a broj $\mu_e A$ *spoljašnjom Žordanovom* merom* skupa A (unutrašnjom i spoljašnjom n-dimenzionalnom merom). Očito je $\mu_i A \leqslant \mu_e A$.

Definicija 5.1.1

Ako je $\mu_i A = \mu_e A$, onda kažemo da je skup A *merljiv (po Žordanu)*, a taj broj označavamo sa μA i nazivamo *n-dimenzionalnom Žordanovom merom* skupa A.

Lako se pokazuje da $\mu_i A$ i $\mu_e A$ (pa samim tim i μA, ako postoji) ne zavise od segmenta $I \supset A$, nego samo od samog skupa A. Mi ćemo ubuduće govoriti o podelama, misleći pri tom na podele segmenta u kome se nalazi posmatrani skup.

Svojstva Žordanove mere

Primetimo najpre da za svaki merljiv skup $A \subset \mathbf{R}^n$ važi $\mu A \geqslant 0$.

Stav 5.1.1

Ako su $A, B \subset \mathbf{R}^n$ merljivi skupovi i $A \subset B$, onda je $\mu A \leqslant \mu B$.

Dokaz.

Za svaku podelu P je $\underline{\omega}_P(A) \subset \underline{\omega}_P(B)$, odakle je $|\underline{\omega}_P(A)| \leqslant |\underline{\omega}_P(B)|$, što daje $\mu_i A \leqslant \mu_i B$. Dakle je i $\mu A \leqslant \mu B$. ■

Stav 5.1.2

Ako je $A \subset \mathbf{R}^n$ neprazan, otvoren i merljiv skup, onda je $\mu A > 0$.

Dokaz.

Postoje tačka $x \in A$ i kugla $K(x,r) \subset A$, $r > 0$. No, tada postoji i segment $I_{a,b}$, upisan u $K(x,r)$. Iz $\mu I_{a,b} > 0$ i prethodnog stava sledi tvrđenje. ■

Stav 5.1.3

Mera skupa A jednaka je nuli ako i samo ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podela P, tako da je $|\overline{\omega}_P(A)| < \varepsilon$.

Dokaz.

Da je uslov neophodan sledi iz (2), a iz $\inf\limits_P |\overline{\omega}_P(A)| < \varepsilon$ i činjenice da je ε proizvoljno malo sledi $\mu_e A = 0$, pa je uslov i dovoljan. ■

Teorema 5.1.1

Ako je $A \subset \mathbf{R}^n$ ograničen skup, onda je $\mu_e \partial A = \mu_e A - \mu_i A$.

Dokaz.

Uočimo proizvoljan segment $I \supset A$. Za proizvoljnu podelu P važi jednakost $|\overline{\omega}_P(\partial A)| = |\overline{\omega}_P(A)| - |\underline{\omega}_P(A)|$, odakle zbog (1) i (2) sledi $\mu_e \partial A \geqslant \mu_e A - \mu_i A$.

* C. Jordan (1838–1922), francuski matematičar

S druge strane, iz (1) i (2) sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podela P, tako da je $|\underline{\omega}_P(A)| > \mu_i A - \frac{\varepsilon}{2}$ i $|\overline{\omega}_P(A)| < \mu_e A + \frac{\varepsilon}{2}$, a kako je

$$\mu_e \partial A \leqslant |\overline{\omega}_P(\partial A)| = |\overline{\omega}_P(A)| - |\underline{\omega}_P(A)|,$$

to je $\mu_e \partial A \leqslant \mu_e A + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\mu_i A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mu_e A - \mu_i A + \varepsilon$. No, ε je proizvoljno malo, pa je $\mu_e \partial A \leqslant \mu_e A - \mu_i A$. Ova nejednakost sa gore dobijenom dokazuje tvrđenje. ■

Posledica 5.1.1

Ograničen skup A u prostoru $\mathbf{R}^n$ je merljiv ako i samo ako je $\mu \partial A = 0$. ■

Stav 5.1.4

Ako su $A, B \subset \mathbf{R}^n$ merljivi skupovi, onda su merljivi i $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

Dokaz.

Sledi iz posledice 1 i inkluzija $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ i $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$ (v. M.A.I, zadatak 9.5). ■

Teorema 5.1.2

Neka su A, B merljivi skupovi i $A \cap B \subset \partial A \cup \partial B$. Tada je skup $A \cup B$ merljiv i važi $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.

Dokaz.

$A \cup B$ je merljiv skup prema stavu 4.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno malo. Prema (1) i (2) postoji podela P, tako da je

$$\mu A - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(A)| \leqslant |\overline{\omega}_P(A)| < \mu A + \varepsilon,$$
$$\mu B - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(B)| \leqslant |\overline{\omega}_P(B)| < \mu B + \varepsilon.$$

Na osnovu pretpostavke odavde sledi

$$\mu A - \varepsilon + \mu B - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(A)| + |\underline{\omega}_P(B)| \leqslant \mu_i(A \cup B)$$
$$\leqslant \mu_e(A \cup B) \leqslant |\overline{\omega}_P(A)| + |\overline{\omega}_P(B)| < \mu A + \varepsilon + \mu B + \varepsilon,$$

odakle imamo

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B. \quad ■$$

Posledica 5.1.2

Ako su $A, B \subset \mathbf{R}^n$ merljivi skupovi i $A \subset B$, onda je $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

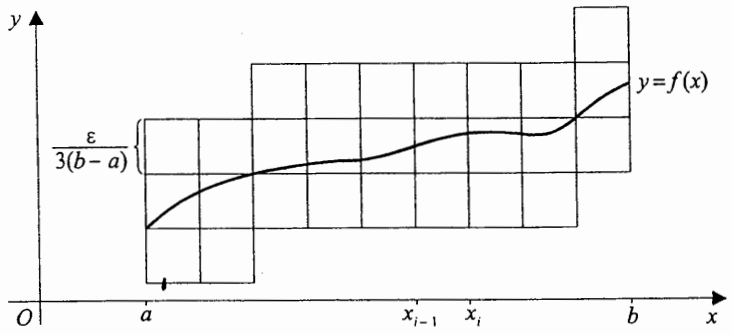
Dokaz.

Iz jednakosti $(B \setminus A) \cup A = B$ i iz prethodnog stava sledi $\mu(B \setminus A) + \mu A = \mu B$. ■

Primeri 5.1.2

1° Sa A označimo skup racionalnih brojeva u skupu $[0,1] \subset \mathbf{R}$. Za proizvoljnu podelu P segmenta $[0,1]$ je $|\underline{\omega}_P(A)| = 0$, jer svaki podsegment podele P sadrži iracionalnu tačku. Očito je $|\overline{\omega}_P(A)| = 1$. Dakle je $\mu_i A = 0$, $\mu_e A = 1$ i skup A nije merljiv po Žordanu.

2° Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Sa A označimo njen grafik, $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = f(x)\}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz neprekidnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$ sledi da postoji takva podela $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$ da je $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ čim tačke x', x'' pripadaju istom segmentu podele T. Tačke skupa A nalaze se u uniji pravougaonika stranica dužine $x_i - x_{i-1}$ i $\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, sl. 2. Dakle se skup A nalazi u unutrašnjosti unije pravougaonika čija ukupna mera iznosi $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$. Prema stavu 3 je $\mu A = 0$.



Sl. 5.1.2

3° Sa S označimo krivolinijski trapez u ravni $\mathbf{R}^2$, ograničen segmentom $[a,b]$ ose Ox, pravim $x = a$, $x = b$ i lukom krive $y = f(x)$ (f je kao u prethodnom primeru). Lako se vidi prema prethodnom primeru da je $\mu\partial S = 0$, pa je skup S merljiv. Izaberimo takvu podelu P u prostoru $\mathbf{R}^2$, da prave na kojima se nalaze ivice pravougaonika, paralelne y-osi, seku x-osu u tačkama x_0, x_1, ..., x_n. Pri tom je $a = x_0$, $b = x_n$. Sa $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ označimo odgovarajuću podelu segmenta $[a,b]$. Ako se još sa $\sigma(f,T,\xi)$ označi integralna suma funkcije f na $[a,b]$ za neki izbor ξ istaknutih tačaka, onda se vidi da je

$$|\omega_P(S)| \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant |\overline{\omega}_P(S)|,$$

što daje $\mu S = \int_a^b f(x)\,dx$.

4° Grafik S neprekidne funkcije $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbf{R}^{n-1}$, gde je skup D zatvoren i ograničen, u prostoru $\mathbf{R}^n$ ima meru nula. Dokaz ovog tvrđenja sličan je dokazu u primeru 2°.

5° Površ S data je jednačinom $x = \varphi(u)$, odnosno jednakostima

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \overline{D} \subset \mathbf{R}^{n-1}$, gde su φ_i i $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, neprekidni na $\overline{D}$, a D je otvoren, konveksan i ograničen skup. Pokažimo da je n-dimenzionalna mera μS skupa S jednaka nuli.

Uočimo dve proizvoljne tačke $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ i $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ na površi S. Za njih postoje odgovarajuće vrednosti parametara $u_1, \dots, u_{n-1}$, tako da je $x'_i = \varphi_i(u'_1, \dots, u'_{n-1})$, $x''_i = \varphi_i(u''_1, \dots, u''_{n-1})$, $i = 1, \dots, n$. Prema teoremi 2.4.2 je

$$\|x'' - x'\| \leqslant \|u'' - u'\| \max \|d\varphi(\tau)\| = C\|u'' - u'\| \tag{3}$$

(tačka $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ je između $u' = (u'_1, \dots, u'_{n-1})$ i $u'' = (u''_1, \dots, u''_{n-1})$, a C je konstanta).

Uočimo jednu kocku I u prostoru $\mathbf{R}^{n-1}$ koja sadrži skup D i podelimo je na p^{n-1} jednakih kocki V^i, $i = 1, \dots, p^{n-1}$. Zbog svojstva površi S izraženog u nejednakosti (3), postupajući slično kao u primeru 2°, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ možemo izabrati p dovoljno veliko, tako da sve tačke površi S mogu da se smeste u kocke $W^{i_1}, \dots, W^{i_r}$ prostora $\mathbf{R}^n$ i da važi $\sum\limits_{k=1}^{r} \mu W^{i_k} < \varepsilon$.

6° Uočimo proizvoljan merljiv skup $A \subset \mathbf{R}^n$. Neka deo površi S (koja zadovoljava uslove kao u prethodnom primeru) deli skup A na delove A_1 i A_2. Tada su A_1 i A_2 merljivi. Naime, iz činjenice da je $\partial A_1 \subset \partial A \cup S$ i $\partial A_2 \subset \partial A \cup S$, na osnovu teorema 1 i 2, te prethodnog primera, sledi tvrđenje.

7° Mera $\mu\Delta$ intervala $\Delta = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \dots, n\}$ iznosi $\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Ovo tvrđenje neposredno sledi iz definicije. ▲

5.2. n-INTEGRAL

Neka je $I \subset \mathbf{R}^n$ segment. Uočimo familiju $T = \{V^i \mid i = 1, \dots, k\}$ merljivih zatvorenih skupova, tako da je $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V^i$ i $(V^i)^\circ \cap (V^j)^\circ = \emptyset$ za $i \neq j$. Familiju T nazvaćemo *podelom* segmenta I. Primetimo da ovim proširujemo pojam podele definisan u odeljku 1. Pri tom ćemo ovu podelu nazivati proizvoljnom, a podelu u odeljku 1 — podelom na podsegmente. Ukoliko je jasno o kojoj se podeli radi, naziv podele nećemo isticati.

U skup $\mathcal{T}$ svih proizvoljnih podela segmenta I može se uvesti uređenje $\prec$, tako da je $T' \prec T''$ ako je svaki element $V'' \in T''$ podskup nekog elementa $V' \in T'$. Za svaku podelu $T = \{V^i \mid i = 1, \dots, k\}$ segmenta I, prema teoremi 1.2 važi jednakost

$$\mu I = \sum_{i=1}^{k} \mu V^i.$$

Neka je $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ proizvoljna podela segmenta $I \subset \mathbf{R}^n$. U svakom elementu V^i izaberimo tačku $\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$ i nazovimo je *istaknutom tačkom*. Ovakvu podelu T, kod koje je u svakom njenom elementu V^i izabrana istaknuta tačka ξ^i, $i = 1, \dots, k$, nazvaćemo *podelom sa istaknutim tačkama*, u oznaci (T, ξ).

Sa δV^i označimo dijametar elementa V^i podele T. *Parametrom podele* T nazovimo najveći dijametar $\lambda(T)$ elemenata V^i, tj.

$$\lambda(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \delta V^i.$$

Neka je $I_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \dots, n \}$ proizvoljan segment u prostoru $\mathbf{R}^n$. Primetimo da za svaku podelu T tog segmenta i svako $\varepsilon > 0$ možemo naći podelu T', tako da je $T \prec T'$ i $\lambda(T') < \varepsilon$. Ovo se pokazuje korišćenjem primera 1.2.6°. Posebno, za svako $\varepsilon > 0$ i svaku podelu P segmenta $I_{a,b}$ na podsegmente možemo naći podele na segmentima $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, koje indukuju podelu P' segmenta $I_{a,b}$ za koju važi $P \prec P'$, $\lambda(P') < \varepsilon$.

Definicija 5.2.1

Neka je funkcija $f\colon I \to \mathbf{R}$ definisana na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$ i neka je (T, ξ) proizvoljna podela s istaknutim tačkama toga segmenta, $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$. Zbir

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu V^i \tag{1}$$

nazivamo *integralnim zbirom (integralnom sumom)* funkcije f na segmentu I po podeli (T, ξ). Broj J je limes integralne sume $\sigma(f, T, \xi)$ kad $\lambda(T) \to 0$, u oznaci

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi) = J,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $|\sigma(f, T, \xi) - J| < \varepsilon$ za svaku podelu T za koju je $\lambda(T) < \delta$ i za svaki izbor istaknutih tačaka. Ako takav broj J postoji, on se naziva *n-integralom* funkcije f po segmentu I i označava se sa $\int_I f(x)\, dx$.

Dakle je

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi) = \int_I f(x)\, dx,$$

ako limes na levoj strani ove jednakosti postoji. Osim pomenute oznake za n-integral koriste se i sledeće:

$$\int_I f\, dx, \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n, \quad \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_I f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Za $n = 2$ i $n = 3$ imamo 2-integral, odnosno 3-integral, koje nazivamo *dvojni*, odnosno *trojni integral* i najčešće označavamo sa

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy, \quad \text{odnosno} \quad \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ako postoji n-integral funkcije f na segmentu I, kazaćemo da je f *integrabilna po Rimanu* na I i pisati $f \in \mathcal{R}(I)$, gde je, dakle, sa $\mathcal{R}(I)$ označen skup integrabilnih po Rimanu funkcija na segmentu I.

Primeri 5.2.1

1° Funkcija $f(x) = c$, $x \in I$, definisana na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$, integrabilna je. Naime, njena integralna suma ima oblik

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu V^i = c \sum_{i=1}^{k} \mu V^i = c \cdot \mu I.$$

2° Neka je $f(x)$ integrabilna na $I \subset \mathbf{R}^n$ funkcija. Posmatrajmo funkciju $cf(x)$ na segmentu I. Integralna suma ove funkcije na segmentu I data je izrazom

$$\sigma(cf, T, \xi) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi^i) \cdot \mu V^i = c \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu V^i,$$

odakle se, posle prelaska na limes, dobija

$$\int_I cf(x)\, dx = c \int_I f(x)\, dx. \quad \blacktriangle$$

Stav 5.2.1

Ako je realna funkcija f integrabilna na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$, onda je ona i ograničena na njemu.

Dokaz.

Neka je $\delta > 0$ proizvoljno mali broj i neka je $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ podela segmenta I, $\lambda(T) < \delta$. Pretpostavimo da je funkcija f neograničena na I. Tada postoji element V^r podele T na kome je f neograničena. Integralnu sumu $\sigma(f, T, \xi)$ napišimo u obliku

$$\sigma(f, T, \xi) = f(\xi^r) \cdot \mu V^r + \sum_{i \neq r} f(\xi^i) \cdot \mu V^i.$$

Pri izabranoj podeli T i izabranim istaknutim tačkama ξ^i, $i \neq r$, drugi sabirak s desne strane ove jednakosti ima stalnu vrednost. Biranjem tačke ξ^r u prvom sabirku, ovaj može biti proizvoljno velik. Dakle, ne postoji konačan $\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi)$. Kontradikcija. ■

Darbuove sume

Pretpostavimo da je realna funkcija f definisana na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$ i ograničena na tom segmentu. Neka je $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ podela segmenta I. Označimo $m_i = \inf_{x \in V^i} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in V^i} f(x)$. Sume

$$s = s(f, T) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \mu V^i \quad \text{i} \quad S = S(f, T) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \mu V^i$$

nazivamo *donjom*, odnosno *gornjom Darbuovom sumom funkcije f po podeli T*.

Navešćemo neka svojstva Darbuovih suma (uporediti sa M.A.I).

Iz nejednakosti $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, $i = 1, \ldots, k$, sledi $m_i \cdot \mu V^i \leqslant f(\xi^i) \cdot \mu V^i \leqslant M_i \cdot \mu V^i$, odakle sabiranjem za $i = 1, \ldots, k$, dobijamo

$$s(f,T) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T).$$

Lako se vidi da važe jednakosti

$$\inf_{\xi^i \in V^i} \sigma(f,T,\xi) = s(f,T), \quad \sup_{\xi^i \in V^i} \sigma(f,T,\xi) = S(f,T).$$

Neka su T i T' dve podele segmenta $I \subset \mathbf{R}^n$ i neka je $T \prec T'$. Tada za svaki element V^i podele T postoje elementi W^{i_s} podele T', tako da je $\bigcup_s W^{i_s} = V^i$, odnosno $\bigcup_i (\bigcup_s W^{i_s}) = \bigcup_i V^i = I$. Označimo

$$m_{i_s} = \inf_{x \in W^{i_s}} f(x), \quad M_{i_s} = \sup_{x \in W^{i_s}} f(x).$$

Iz činjenice da je $m_i \leqslant m_{i_s} \leqslant M_{i_s} \leqslant M_i$, za svaki element $W^{i_s} \subset V^i$, kao i za svako $V^i \subset I$, sledi

$$s(f,T) \leqslant s(f,T') \leqslant S(f,T') \leqslant S(f,T), \quad T \prec T'.$$

Ako su T' i T'' dve proizvoljne podele segmenta $I \subset \mathbf{R}^n$, onda je lako konstruisati podelu T, tako da je $T' \prec T$, $T'' \prec T$. Za ove podele važi

$$s(f,T') \leqslant s(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S(f,T'').$$

Odavde sledi da nijedna donja Darbuova suma nije veća ni od jedne gornje Darbuove sume. Štaviše, skup donjih Darbuovih suma ograničen je odozgo, a skup gornjih Darbuovih suma ograničen je odozdo. Dakle, postoje konačni $\sup_T s(f,T)$ i $\inf_T S(f,T)$, koji se nazivaju *donjim*, odnosno *gornjim Darbuovim integralom funkcije* f *na segmentu* I i označavaju sa

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx = \sup_T s(f,T) \qquad \text{i} \qquad \overline{\int_I} f(x)\,dx = \inf_T S(f,T).$$

Teorema 5.2.1

Neka je f ograničena realna funkcija na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$. Tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:

1° *f je integrabilna funkcija na I;*
2° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in \mathcal{T})(\lambda(T) < \delta \Rightarrow S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon)$;
3° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in \mathcal{T})(\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,T,\xi') - \sigma(f,T,\xi'')| < \varepsilon)$;
4° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T', T'' \in \mathcal{T})(\lambda(T') < \delta,\ \lambda(T'') < \delta \Rightarrow |\sigma(f,T',\xi') - \sigma(f,T'',\xi'')| < \varepsilon)$.

Pri tom su u 3° i 4° sa ξ' i ξ'' označeni proizvoljni skupovi istaknutih tačaka u odgovarajućim podelama.

Dokaz je sličan dokazu teoreme 8.1.1 iz M.A.I, te ga izostavljamo. ■

Koristeći gornju teoremu pokazaćemo da su neprekidne funkcije integrabilne.

Teorema 5.2.2

Ako je realna funkcija f neprekidna na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$, onda je $f \in \mathcal{R}(I)$.

Dokaz.

Kako je f neprekidna funkcija na segmentu I, to je ona ravnomerno neprekidna, pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon$ za $d(\xi', \xi'') < \delta$. Uočimo podelu $T = \{V^i\}$ za koju je $\lambda(T) < \delta$. Prelaskom na supremum dobija se

$$M_i - m_i = \sup_{\xi', \xi'' \in V^i} |f(\xi') - f(\xi'')| = \max_{\xi', \xi'' \in V^i} |f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon,$$

jer dijametar svakog elementa V^i je manji od δ. Odavde sledi da je

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum_i (M_i - m_i) \cdot \mu V^i < \varepsilon \cdot \mu I.$$

Na osnovu prethodne teoreme sledi tvrđenje. ■

Druga definicija n-integrala

Neka je realna funkcija f definisana na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$. Uočimo podelu na podsegmente $P = \{I^i\}_{i=1}^k$ segmenta I. U svakom podsegmentu I^i uočimo istaknutu tačku ξ^i.

Definicija 5.2.2

Zbir

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^k f(\xi^i) \cdot \mu I^i$$

nazivamo integralnim zbirom (integralnom sumom) funkcije f na segmentu I po podeli (P,ξ). Za dati segment I, neka je $P_k = \{I^{k,i}\}_{i=1}^{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, niz podela na podsegmente, sa istaknutim tačkama $\xi^{k,i}$, tako da $\lambda(P_k) \to 0$ za $k \to \infty$.

Ako postoji

$$\lim_{k \to \infty} \sigma(f, P_k, \xi^k) = J, \tag{2}$$

onda se J naziva *n-integralom funkcije f na segmentu I*. Označava se sa $\int_I f(x)\,dx$.

Primetimo da (2) znači: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je

$$|\sigma(f, P_k, \xi^k) - J| < \varepsilon$$

kad god je $\lambda(P_k) < \delta$ i za svaki izbor istaknutih tačaka.

Očigledno se definicije 1 i 2 n-integrala razlikuju po tome što u definiciji 2 umesto proizvoljnih podela figurišu podele na podsegmente.

Teorema 1 važi i za n-integrale u smislu definicije 2.

Teorema 5.2.3

Definicije 1 i 2 n-integrala ekvivalentne su.

Dokaz.

Neka je funkcija $f: I \to \mathbf{R}$ integrabilna na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$ u smislu definicije 1. Svaka podela na podsegmente segmenta I je i proizvoljna podela pa je funkcija f integrabilna u smislu definicije 2.

Obrnuto, neka je funkcija $f: I \to \mathbf{R}$ integrabilna na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$ u smislu definicije 2. Uočimo proizvoljnu donju i gornju Darbuovu sumu

$$s = \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot \mu V^i \quad \text{i} \quad S = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu V^i \tag{3}$$

funkcije f po podeli T segmenta I. Pokažimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $S - s < \varepsilon$ za $\lambda(T) < \delta$, što će prema teoremi 1 značiti da je funkcija f integrabilna u smislu definicije 1.

Po pretpostavci, za $\varepsilon > 0$ postoji podela na podsegmente $P = \{I^k\}_{k=1}^{r}$ segmenta I tako da za gornju $\tilde{S} = \sum \tilde{M}_k \cdot \mu I^k$ i donju $\tilde{s} = \sum \tilde{m}_k \cdot \mu I^k$ Darbuovu sumu funkcije f po podeli P važi

$$\tilde{S} - \tilde{s} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Označimo

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{r} \partial I^k\right) \setminus \partial I \quad \text{i} \quad M = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Kako je $\mu A = 0$, to postoji podela na podsegmente $P' = \{I'^i\}_{i=1}^{q}$ segmenta I i postoji $B = \bigcup \{I'^{i_B}\}_{i_B}$ tako da je $A \subset B^\circ$, $\mu B < \dfrac{\varepsilon}{16M}$. Neka je

$$\delta = \inf\{\, d(x,y) \mid x \in A, y \in \partial B \setminus \partial I \,\}.$$

Primetimo da je $\delta > 0$.

Posmatrajmo sada sume (3) za koje je $\lambda(T) < \delta$. U cilju dokaza da je $S - s < \varepsilon$ dokažimo najpre da je

$$|\tilde{S} - S| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{i} \quad |\tilde{s} - s| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pođimo od jednakosti

$$\tilde{S} - S = \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu I^k - \left(\sum{}' M_i \cdot \mu V^i + \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i\right),$$

gde se u prvom sabirku u zagradi nalaze svi oni članovi $M_i \cdot \mu V^i$ za koje se V^i nalazi samo u jednom I^k, dok su u drugom sabirku svi ostali članovi. Označimo još

sa W'^k uniju svih V^i koji se nalaze samo u I^k, a sa W''^k skup $\overline{I^k \setminus W'^k}$. Skupovi W'^k i W''^k su merljivi i važi jednakost $W'^k \cup W''^k = I^k$.

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\tilde{S} - S &= \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot (\mu W'^k + \mu W''^k) - \left(\sum{}' M_i \cdot \mu V^i + \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W'^k - \sum{}' M_i \cdot \mu V^i + \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W''^k - \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i \\
&= \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W'^k - \sum_{k} \sum_{i_k} M_{i_k} \cdot \mu V^{i_k} + \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W''^k - \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\tilde{M}_k \cdot \mu W'^k - \sum_{i_k} M_{i_k} \cdot \mu V^{i_k}\right) + \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W''^k - \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i,
\end{aligned}$$

gde se u izrazu $\sum_k \sum_{i_k} M_{i_k} \cdot \mu V^{i_k}$ sabiranje vrši najpre po sabircima u jednom I^k, a potom po $k = 1, 2, \ldots, r$.

Primetimo da je

$$\left|\sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu W''^k\right| \leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{r} \mu W''^k < M \cdot \frac{\varepsilon}{16M} = \frac{\varepsilon}{16}$$

i

$$\left|\sum{}'' M_i \cdot \mu V^i\right| \leqslant M \cdot \sum{}'' \mu V^i < M \cdot \frac{\varepsilon}{16M} = \frac{\varepsilon}{16},$$

jer su svi skupovi W''^k, kao i svi skupovi V^i u sumi $\sum''$ (zbog $\lambda(T) < \delta$) sadržani u skupu B.

Tada je

$$\begin{aligned}
|\tilde{S} - S| &< \left|\sum_{k=1}^{r} (\tilde{M}_k \cdot \mu W'^k - \tilde{m}_k \cdot \mu W'^k)\right| + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} \\
&= \sum_{k=1}^{r} (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \cdot \mu W'^k + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} \\
&\leqslant \tilde{S} - \tilde{s} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je $|\tilde{s} - s| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Odavde sledi

$$\tilde{s} - \frac{\varepsilon}{4} < s \leqslant S < \tilde{S} + \frac{\varepsilon}{4},$$

pa zbog $\tilde{S} - \tilde{s} < \dfrac{\varepsilon}{8}$ imamo

$$S - s < \varepsilon.$$

Takođe, kako za integralne sume σ i $\tilde{\sigma}$ važi $s < \sigma < S$ i $\tilde{s} < \tilde{\sigma} < \tilde{S}$, granične vrednosti $\lim \sigma = J$ i $\lim \tilde{\sigma} = \tilde{J}$ su jednake. ∎

Skupovi Lebegove mere nula

Potpun odgovor na pitanje o integrabilnosti daje Lebegova teorema.

Najpre razmotrimo skupove čija Lebegova mera je nula.

Sa $\Delta_{a,b} \subset \mathbf{R}^n$ označimo interval u prostoru $\mathbf{R}^n$, tj.

$$\Delta_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \dots, n \}.$$

Definicija 5.2.3

Lebegova mera $m\Delta_{a,b}$ intervala $\Delta_{a,b}$ je broj $m\Delta_{a,b} = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Skup $A \subset \mathbf{R}^n$ ima *Lebegovu meru nula* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prebrojiv skup intervala $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^k, \dots$, sa svojstvom $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta^k \supset A$ i $\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta^k < \varepsilon$.

Primeri 5.2.2

1° Skup $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{R}^n$ svih tačaka sa racionalnim koordinatama u prostoru $\mathbf{R}^n$ je prebrojiv, te ga možemo predstaviti u obliku $\mathbf{Q}^n = \{q_1, q_2, \dots, q_k, \dots\}$. Tačku q_k prekrijmo intervalom $\Delta^k \subset \mathbf{R}^n$, $m\Delta^k < \varepsilon/2^k$, $k = 1, 2, \dots$, gde je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako je $\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta^k < \varepsilon$, to je $m\mathbf{Q}^n = 0$.

Primetimo da Žordanova mera $\mu\mathbf{Q}^n$ ne postoji.

2° Neka su $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ podskupovi prostora $\mathbf{R}^n$ Lebegove mere nula. Tada skup $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ima Lebegovu meru nula, jer se skup A_k može prekriti unijom intervala $\Delta^{k,j}$ $(j \in \mathbf{N})$ sa $\sum_{j=1}^{\infty} m\Delta^{k,j} < \varepsilon/2^k$, $k = 1, 2, \dots$, pa se sam skup A prekriva unijom $\bigcup_{k,j=1}^{\infty} \Delta^{k,j}$, pri čemu je $\sum_{k,j=1}^{\infty} m\Delta^{k,j} < \varepsilon$.

3° Neka je B podskup skupa $A \subset \mathbf{R}^n$, $mA = 0$. Iz definicije sledi neposredno $mB = 0$. ▲

Ako je Žordanova mera μA nekog skupa $A \subset \mathbf{R}^n$ jednaka nuli, onda je i Lebegova mera mA tog skupa takođe jednaka nuli. U cilju dokaza ovog tvrđenja dovoljno je primetiti da, ako se segmentom I, sa $\mu I < \varepsilon$, može pokriti neki skup A, onda postoji interval Δ, sa $m\Delta < \lambda\varepsilon$, $\lambda > 1$, kojim se može pokriti skup A (umesto segmenta I za pokrivanje skupa A može se uzeti interval Δ, takav da je segment $\overline{\Delta}$ centralno homotetičan segmentu I).

Uočimo sada kompaktan skup $K \subset \mathbf{R}^n$. Pretpostavimo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji familija $\{ \Delta^i \mid i \in \mathbf{N} \}$ tako da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^i \supset K$ i $\sum_{i=1}^{\infty} m\Delta^i < \varepsilon$. Tada postoji konačna podfamilija $\{ \Delta^{i_k} \mid k = 1, \dots, p \}$ koja pokriva skup K. No, tada je i Žordanova mera μK manja od ε.

Formulišimo dva poslednja tvrđenja u obliku leme.

Lema 5.2.1

Skup $A \subset \mathbf{R}^n$ Žordanove mere nula ima Lebegovu meru nula. Kompaktan skup $K \subset \mathbf{R}^n$ Lebegove mere nula ima Žordanovu meru nula. ■

Teorema 5.2.4 (Lebeg)

Ograničena realna funkcija f na segmentu $I \subset \mathbf{R}^n$ integrabilna je na tom segmentu ako i samo ako je neprekidna svuda osim eventualno na skupu Lebegove mere nula.

Dokaz.

Kako je funkcija f ograničena, to postoji broj M tako da je $|f(x)| \leqslant M$, $x \in I$. Pretpostavimo da skup $D \subset I$ prekida funkcije f ima Lebegovu meru $mD = 0$. Za $\alpha > 0$ označimo sa $D_\alpha \subset D$ skup tačaka $x \in D$ za koje je oscilacija $\omega(f, x) \geqslant \alpha$, tj. $D_\alpha = \{ x \in D \mid \omega(f, x) \geqslant \alpha \}$. Prema zadatku 9.31 iz M.A.I, skupovi D_α su zatvoreni. Odavde sledi da su oni i kompaktni i, prema lemi 1, imaju Žordanovu meru nula.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo $\alpha > 0$ tako da je $4\alpha \cdot \mu I < \varepsilon$, kao i $\delta > 0$ tako da je $4\delta M < \varepsilon$. Kako je $\mu(D_\alpha) = 0$, to se skup D_α može pokriti sa konačno mnogo intervala čija ukupna mera je manja od δ. Označimo uniju tih intervala sa J, a skup $I \setminus J$ sa K. Za svaku tačku $x \in K$ je $\omega(f, x) < \alpha$, pa postoji kub $K_\gamma(x)$ (otvorena kocka sa centrom x, čija ivica je dužine γ), takav da je $\omega(f, K_\gamma(x)) < 2\alpha$. Kubovi $K_{\gamma/2}(x)$ obrazuju otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K, pa se iz tog pokrivača može izdvojiti konačan potpokrivač. Ravni određene stranama kubova koji čine taj potpokrivač, kao i strane intervala koji čine skup J, određuju jednu podelu $P = \{I^i\}$ datog segmenta I.

Razliku $S(f, P) - s(f, P)$ predstavimo u obliku

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{P_1} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i + \sum_{P_2} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i,$$

gde se prvi zbir s desne strane jednakosti odnosi na podsegmente podele P koji su sadržani u J, a drugi na ostale podsegmente podele P. Tada je

$$S(f,P) - s(f,P) \leqslant 2M \cdot \delta + 2\alpha \cdot \mu I < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema teoremi 1 funkcija f je integrabilna.

Pretpostavimo da je funkcija f integrabilna na segmentu I. Neka su $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbf{N}$ proizvoljni. Izaberimo podelu P segmenta I tako da je

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Sa $P_1 \subset P$ označimo onaj skup podsegmenata kod koga svaki podsegment sadrži u svojoj unutrašnjosti bar jednu tačku skupa $D_{1/k}$. Tada je

$$S(f,P) - s(f,P) \geqslant \sum_{I^i \in P_1} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i \geqslant \frac{1}{k} \cdot \mu\Big(\bigcup_{I^i \in P_1} I^i \Big),$$

tj.

$$\mu\Big(\bigcup_{I^i \in P_1} I^i \Big) < \varepsilon.$$

Tačke skupa $D_{1/k}$ se nalaze u $\bigcup_{I^i \in P_1} I^i$ i u granici ostalih skupova I^i. No, Žordanova mera ovih skupova je nula. Dakle je $mD_{1/k} = \mu D_{1/k} = 0$.

S druge strane, skup D svih tačaka prekida može se napisati u obliku

$$D = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} D_{1/k},$$

pa je i $mD = 0$. ■

Integral na skupovima merljivim po Žordanu

Za primene su potrebni ne samo oni integrali koji su definisani na segmentu, nego i integrali koji su definisani na opštijim, složenijim skupovima. Ovde ćemo definisati integral na skupu merljivom po Žordanu.

Neka je f ograničena realna funkcija na skupu $D \subset \mathbf{R}^n$, koji je merljiv po Žordanu. Sa I označimo proizvoljan segment koji sadrži D. Definišimo funkciju $g\colon I \to \mathbf{R}$ sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in D, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Za funkciju f kaže se da je *integrabilna u Rimanovom smislu* na skupu D ako postoji integral $\int_I g(x)\,dx$. Pri tom po definiciji važi

$$\int_D f(x)\,dx = \int_I g(x)\,dx.$$

Skup integrabilnih funkcija na skupu D označićemo sa $\mathcal{R}(D)$.

Slično se definišu i gornji i donji Darbuov integral funkcije f na skupu D:

$$\bar{\int_D} f(x)\,dx = \bar{\int_I} g(x)\,dx,$$

$$\underline{\int_D} f(x)\,dx = \underline{\int_I} g(x)\,dx,$$

Primetimo da se kod definicije integrala funkcije f na skupu D može uzeti proizvoljan segment $I \supset D$. Naime, definišimo $\int_D f(x)\,dx$ pomoću funkcija $g_1\colon I^1 \to \mathbf{R}$ i $g_2\colon I^2 \to \mathbf{R}$, $I^1 \cap I^2 \supset D$. Označimo $I^1 \cap I^2 = I$. Uzevši u obzir da je $g_1(x) = g_2(x)$ za $x \in I$ i $g_1(x) = 0$, $x \in I^1 \setminus I$, odnosno $g_2(x) = 0$, $x \in I^2 \setminus I$, lako se pokazuje da je

$$\int_{I^1} g_1(x)\,dx = \int_{I^2} g_2(x)\,dx,$$

tj. $\int_D f(x)\,dx$ ne zavisi od izbora segmenta koji sadrži skup D.

Polazeći od Lebegove teoreme 4, sada možemo formulisati kriterijum za egzistenciju integrala.

Teorema 5.2.5

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv po Žordanu skup. Ograničena funkcija $f\colon D \to \mathbf{R}$ je integrabilna na D ako i samo ako Lebegova mera skupa njenih tačaka prekida je nula.

Dokaz.

Neka segment I sadrži skup D. Definišimo funkciju $g\colon I \to \mathbf{R}$ sa $g(x) = f(x)$, $x \in D$ i $g(x) = 0$, $x \in I \setminus D$. Tačke prekida funkcije f su i tačke prekida funkcije g, s tim što funkcija g može imati tačke prekida još u skupu ∂D. No, kako je $\mu \partial D = 0$, to iz teoreme 4 sledi tvrđenje. ■

Žordanova mera skupa izražena integralom

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ ograničen skup, merljiv po Žordanu. Izrazimo meru μD skupa D integralom.

Uočimo proizvoljan segment $I \subset \mathbf{R}^n$ koji sadrži skup D. Sa χ_D označimo karakterističnu funkciju skupa D,

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in D, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Funkcija χ_D je neprekidna na I, osim u tačkama skupa ∂D, koji prema posledici 1.1 ima meru $\mu \partial D = 0$. Dakle, $\int_I \chi_D\,dx$ postoji.

Neka je $P = \{I^1, \ldots, I^p\}$ proizvoljna podela segmenta I. Sa Δ označimo skup

$$\Delta = \{\, i \mid I^i \cap D \neq \emptyset \,\}.$$

Za gornju Darbuovu sumu $S(\chi_D, P)$ imamo

$$S(\chi_D, P) = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu I^i = \sum_{i \in \Delta} 1 \cdot \mu I^i = \mu\Big(\bigcup_{i \in \Delta} I^i\Big),$$

jer je

$$M_i = \sup_{x \in I^i} \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } i \in \Delta, \\ 0, & \text{za } i \notin \Delta. \end{cases}$$

Kako je

$$\inf_P S(\chi_D, P) = \bar{\int_I} \chi_D(x)\,dx = \int_I \chi_D(x)\,dx = \int_D 1\,dx$$

i

$$\inf_P S(\chi_D, P) = \inf_P \sum_{i \in \Delta} 1 \cdot \mu I^i = \mu D,$$

to je

$$\mu D = \int_D 1 \cdot dx. \tag{4}$$

Dakle važi

Teorema 5.2.6

Ako je $D \subset \mathbf{R}^n$ ograničen i merljiv po Žordanu skup, onda se njegova mera izražava pomoću (4). ■

Napomenimo da se mera figure u ravni $\mathbf{R}^2$ naziva površinom, a mera figure u prostoru $\mathbf{R}^3$ zapreminom.

Na kraju ovog izlaganja o osnovnim pojmovima vezanim za Rimanov n-integral primetimo da smo u njemu pretežno koristili pojam Žordanove mere skupa u $\mathbf{R}^n$. U savremenijem izlaganju analize više se koristi Lebegova mera čija je prednost u odnosu na Žordanovu što operiše sa prebrojivim, umesto sa konačnim pokrivačima (tu razliku smo delimično opisali govoreći o skupovima mere nula).

5.3. SVOJSTVA n-INTEGRALA

Navešćemo najpre svojstvo linearnosti integrala. Napomenimo da ćemo ubuduće merljive po Žordanu skupove prosto nazivati merljivim skupovima.

Stav 5.3.1

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $f, g \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Tada je:

1° $(f \pm g) \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(D)$.

2° $\int_D (f \pm g)(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx \pm \int_D g(x)\,dx$, $\int_D (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_D f(x)\,dx$.

Dokaz.

1° Tvrđenje sledi iz teoreme 2.5.

2° Dokažimo da je $\int_D (f+g)(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx + \int_D g(x)\,dx$. Neka je $I \supset D$ segment u $\mathbf{R}^n$, a $P = \{I^1, \ldots, I^p\}$ je podela segmenta I. Sa h_1, $h_2 \colon I \to \mathbf{R}$ označimo funkcije definisane sa

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in D, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus D, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} g(x), & \text{za } x \in D, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Tada je

$$\sigma(h_1 + h_2, P, \xi) = \sigma(h_1, P, \xi) + \sigma(h_2, P, \xi),$$

odakle sledi tražena jednakost.

Slično se dokazuju i druge dve jednakosti. ■

Stav 5.3.2

Neka su $A, B \subset \mathbf{R}^n$ merljivi skupovi, takvi da je $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ i $D = A \cup B$. Za realnu funkciju f, definisanu na skupu D, važi:

1° *$f \in \mathcal{R}(D)$ ako i samo ako $f \in \mathcal{R}(A)$ i $f \in \mathcal{R}(B)$.*

2° *Ako je $f \in \mathcal{R}(A)$ i $f \in \mathcal{R}(B)$, onda važi jednakost*

$$\int_D f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx. \tag{1}$$

Dokaz.

1° Tvrđenje sledi iz teoreme 2.5.

2° Uočimo proizvoljan segment $I \supset D$ u prostoru $\mathbf{R}^n$ i funkcije $g_i \colon I \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, date pomoću

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in D, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus D, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in A, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus A, \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in B, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus B, \end{cases} \qquad g_4(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in A \cap B, \\ 0, & \text{za } x \in I \setminus (A \cap B). \end{cases}$$

Tada za svako $x \in I$ važi $g_1(x) = g_2(x) + g_3(x) - g_4(x)$. Na osnovu stava 1 je

$$\int_I g_1(x)\,dx = \int_I g_2(x)\,dx + \int_I g_3(x)\,dx - \int_I g_4(x)\,dx.$$

Međutim, $\int_I g_1(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$, $\int_I g_2(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$, $\int_I g_3(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx$, a $\int_I g_4(x)\,dx = \int_{A\cap B} f(x)\,dx = 0$. Naime, iz pretpostavki stava sledi da je $\mu(A \cap B) = 0$, a limes integralnih suma (za integrabilnu funkciju), kad modul podele teži nuli, postoji i ima istu vrednost nezavisno od izbora istaknutih tačaka. ■

Stav 5.3.3

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $f, g \in \mathcal{R}(D)$. Tada je:

1° $f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$.

2° $|f| \in \mathcal{R}(D)$.

3° $1/f \in \mathcal{R}(D)$, *uz uslov* $|f(x)| \geqslant \alpha > 0$, $x \in D$.

Dokaz.

Tvrđenje sledi iz teoreme 2.5. ■

Stav 5.3.4

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $f, g \colon D \to \mathbf{R}$ integrabilne funkcije za koje važi nejednakost $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in D$. Tada je

$$\int_D f(x)\,dx \leqslant \int_D g(x)\,dx.$$

Dokaz.

Ako je $I \subset \mathbf{R}^n$ segment koji sadrži D i $h_1, h_2 \colon I \to \mathbf{R}$ su takve da je $h_1(x) = f(x)$, $h_2(x) = g(x)$ za $x \in D$ i $h_1(x) = h_2(x) = 0$ za $x \in I \setminus D$, tada za podelu $P = \{I^1, \ldots, I^p\}$ važi nejednakost

$$\sigma(h_1, P, \xi) \leqslant \sigma(h_2, P, \xi),$$

odakle se za $\lambda(P) \to 0$ dobija tražena nejednakost. ■

Teorema 5.3.1 (Teorema o srednjoj vrednosti integrala)

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i f, $g\colon D \to \mathbf{R}$ integrabilne funkcije, pri čemu je $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Ako je $m = \inf_{x\in D} f(x)$, $M = \sup_{x\in D} f(x)$, onda važi

$$m \int_D g(x)\,dx \leqslant \int_D (fg)(x)\,dx \leqslant M \int_D g(x)\,dx. \tag{2}$$

Dokaz.

Kako je $m \leqslant f(x) \leqslant M$ i $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$, to prema stavu 4 imamo

$$\int_D mg(x)\,dx \leqslant \int_D f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_D Mg(x)\,dx.$$

Na osnovu stava 2.2° sledi traženo tvrđenje. ■

Istaći ćemo nekoliko posledica teoreme 1.

Posledica 5.3.1

Ako je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $f\colon D \to \mathbf{R}$ zadovoljava uslove $f \in \mathcal{R}(D)$ i $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$, onda je $\int_D f(x)\,dx \geqslant 0$.

Dokaz.

U teoremi 1 stavimo $m \geqslant 0$, $g(x) \equiv 1$. ■

Posledica 5.3.2

Ako je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup, $f\colon D \to \mathbf{R}$ je integrabilna funkcija na D i m, M su kao u teoremi 1, onda postoji $k \in [m, M]$, tako da je

$$\int_D f(x)\,dx = k \cdot \mu D.$$

Dokaz.

U nejednakostima (2) stavimo $g(x) \equiv 1$ i dobijamo

$$m \cdot \mu D \leqslant \int_D f(x)\,dx \leqslant M \cdot \mu D.$$

Ako je $\mu D = 0$, data jednakost važi. Ako je $\mu D \neq 0$, ove nejednakosti postaju

$$m \leqslant \frac{1}{\mu D} \int_D f(x)\,dx \leqslant M,$$

odakle sledi da postoji $k \in [m, M]$, tako da je

$$\frac{1}{\mu D} \int_D f(x)\,dx = k. \quad ■$$

Posledica 5.3.3

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ linearno koneksan, zatvoren i merljiv skup, $f\colon D \to \mathbf{R}$ je neprekidna funkcija, a $g\colon D \to \mathbf{R}$ je integrabilna i $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Tada postoji $\xi \in D$, tako da je

$$\int_D f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_D g(x)\,dx. \tag{3}$$

Dokaz.

Kako je f neprekidna, to je integrabilna na D; postoje tačke $x, y \in D$ u kojima ona dostiže minimum, odnosno maksimum, $f(x) = m$, $f(y) = M$. Zbog linearne koneksnosti postoji put $\alpha\colon [0,1] \to D$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Iz nejednakosti (2) sledi da postoji $k \in [m, M]$, tako da je

$$\int_D f(x)g(x)\,dx = k \int_D g(x)\,dx.$$

Kako je funkcija $f\circ\alpha\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ neprekidna i $(f\circ\alpha)(0) = m$, $f\circ\alpha(1) = M$, to postoji $\tau \in [0,1]$ tako da je $f\circ\alpha(\tau) = k$. Stavljajući $\alpha(\tau) = \xi$, dobija se jednakost (3). ■

Stav 5.3.5

Za realnu funkciju $f \in \mathcal{R}(D)$, definisanu na merljivom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ važe nejednakosti

$$\left|\int_D f(x)\,dx\right| \leqslant \int_D |f(x)|\,dx \leqslant L \cdot \mu D,$$

gde je $L = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

Dokaz.

Iz integrabilnosti funkcije $|f|$ (stav 3.2°), nejednakosti $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ i stava 4 slede nejednakosti

$$-\int_D |f(x)|\,dx \leqslant \int_D f(x)\,dx \leqslant \int_D |f(x)|\,dx,$$

tj. $\left|\int_D f(x)\,dx\right| \leqslant \int_D |f(x)|\,dx$.

Iz nejednakosti $|f(x)| \leqslant L$ i stava 4 sledi nejednakost $\int_D |f(x)|\,dx \leqslant L \cdot \mu D$. ■

Stav 5.3.6

Neka je $E \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $D \subset E$ je takav da je $\mu(E \setminus D) = 0$. Ako je $f \in \mathcal{R}(E)$ i g je ograničena realna funkcija na E, pri čemu je $g(x) = f(x)$, $x \in D$, onda je $g \in \mathcal{R}(E)$ i

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Dokaz.

Za funkciju $h\colon E \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in E$, važi $\int_E h(x)\,dx = \int_D h(x)\,dx + \int_{E\setminus D} h(x)\,dx$. Kako je $h(x) = 0$, $x \in D$, to je $\int_D h(x)\,dx = 0$. Iz $\mu(E \setminus D) = 0$ i posledice 2 sledi $\int_{E\setminus D} h(x)\,dx = 0$. Dakle je $\int_E h(x)\,dx = 0$, tj. $\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx$. ■

5.4. SVOĐENJE n-INTEGRALA NA n-TOSTRUKI INTEGRAL

Izračunavanje n-integrala može se svesti na postupno izračunavanje n Rimanovih integrala. Počećemo slučajem $n = 2$; drugim rečima, pokazaćemo kako se dvojni integral izračunava pomoću dvostrukog (uzastopnog).

Teorema 5.4.1

Neka je realna funkcija $f(x,y)$ integrabilna na pravougaoniku $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2$. Tada važe jednakosti

$$(1) \qquad \iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big) = \int_c^d dy\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big).$$

Pri tom, $\int_c^d f(x,y)\,dy$ je Rimanov integral za fiksirano x ako on postoji, ili pak neki broj između $\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy$ i $\bar{\int}_c^d f(x,y)\,dy$ (ne izuzimajući te granice). Slično se objašnjava i $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Dokaz.

Uočimo podelu $P' = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, $x_i - x_{i-1} = h$ za $i = 1, \dots, p$, segmenta $I' = [a,b]$ i podelu $P'' = \{y_0, y_1, \dots, y_p\}$, $y_i - y_{i-1} = k$ za $i = 1, \dots, p$, segmenta $I'' = [c,d]$. Ove podele indukuju podelu $P = \{I_{i,j} \mid i,j = 1, \dots, p\}$ pravougaonika $I = I' \times I'' = [a,b] \times [c,d]$; pri tom je $I_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = I_i' \times I_j''$ i $\mu I_{i,j} = hk$. Neka je još $m_{i,j} = \inf\limits_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$, $M_{i,j} = \sup\limits_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$.

Za donju Darbuovu sumu $s(f,P)$ funkcije f pri podeli P pravougaonika I važi nejednakost

$$(2) \qquad s(f,P) = \sum_{i,j} m_{i,j}hk = \sum_{i,j} \inf_{x\in I_i', y\in I_j''} f(x,y)\cdot hk$$
$$\leqslant \sum_i \inf_{x\in I_i'}\Big(\sum_j \inf_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k\Big)h.$$

Funkcija f je ograničena na I, pa postoje donji i gornji integral na segmentu I'',

$$\sup_{P''} \sum_j \inf_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k = \underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy,$$

$$\inf_{P''} \sum_j \sup_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k = \bar{\int}_{I''} f(x,y)\,dy.$$

Uočimo proizvoljnu funkciju $\varphi\colon I' \to \mathbf{R}$ za koju važi

$$\underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \leqslant \varphi(x) \leqslant \bar{\int}_{I''} f(x,y)\,dy, \qquad x \in [a,b].$$

Iz poslednje nejednakosti sledi

$$(3) \qquad \sum_i \inf_{x\in I_i'}\Big(\sum_j \inf_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k\Big)h$$
$$\leqslant \sum_i \inf_{x\in I_i'}\Big(\underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy\Big)h \leqslant \sum_i \inf_{x\in I_i'} \varphi(x)\cdot h$$
$$\leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'} \varphi(x)\cdot h \leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'}\Big(\bar{\int}_{I''} f(x,y)\,dy\Big)h.$$

Iz očigledne nejednakosti

$$\bar{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \leqslant \sum_j \sup_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k$$

sledi

$$(4) \qquad \sum_i \sup_{x\in I_i'}\Big(\bar{\int}_{I''} f(x,y)\,dy\Big)h \leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'}\Big(\sum_j \sup_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k\Big)h$$
$$\leqslant \sum_{i,j} M_{i,j}hk = S(f,P).$$

Funkcija $f(x,y)$ je integrabilna na I, pa je $\lim\limits_{p\to\infty} s(f,P) = \lim\limits_{p\to\infty} S(f,P) = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy$. U nejednakostima (2), (3) i (4) pustimo da $p \to \infty$. Vidi se da za funkciju $\varphi(x)$ važi

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

Slično se dobija i jednakost

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy. \quad \blacksquare$$

Primetimo da ćemo integrale

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx \quad \text{i} \quad \int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy,$$

koji se još pišu i u obliku

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy \quad \text{i} \quad \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

nazivati *dvostrukim integralima*.

Primer 5.4.1

Izračunajmo dvojni integral $J = \iint_I (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$, gde je $I = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Prema teoremi 1 imamo

$$J = \int_0^2 dx \int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2)\,dy.$$

Kako je

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2)\,dy = \left[x^2 y + \frac{2}{3}y^3\right]_{y=-1}^1 = 2x^2 + \frac{4}{3}$$

i $\int_0^2 (2x^2 + \frac{4}{3})\,dx = 8$, to je $J = 8$.

Primetimo da se dati integral mogao računati i ovako

$$J = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 (x^2 + 2y^2)\,dx = \int_{-1}^1 \left(4y^2 + \frac{8}{3}\right) dy = 8. \quad \blacktriangle$$

Posmatrajmo sada integral $\int_I f(x)\,dx$, gde je $I = \{(x_1,\dots,x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,\dots,n\}$, $x = (x_1,\dots,x_n)$. U cilju uopštavanja teoreme 1 označimo $u = (x_1,\dots,x_m)$ i $v = (x_{m+1},\dots,x_n)$, za neko $m \in \{1,\dots,n-1\}$. Neka je $I' \subset \mathbf{R}^m$ projekcija skupa I na potprostor $Ox_1 \dots x_m$, tj.

$$I' = \{(x_1,\dots,x_m) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,\dots,m\}$$

i $I'' \subset \mathbf{R}^{n-m}$ je projekcija skupa I na potprostor $Ox_{m+1} \dots x_n$, tj.

$$I'' = \{(x_{m+1},\dots,x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = m+1,\dots,n\}.$$

Koristićemo se zapisima $I = I' \times I''$ i $x = (x_1,\dots,x_n) = (u,v)$.

Teorema 5.4.2

Neka je realna funkcija $f(x_1,\dots,x_n)$ integrabilna na segmentu $I = I' \times I'' \subset \mathbf{R}^n$. Tada važe jednakosti

$$(5) \qquad \int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I'} \left(\int_{I''} f(u,v)\,dv\right) du = \int_{I''} \left(\int_{I'} f(u,v)\,du\right) dv.$$

Pri tom, $\int_{I''} f(u,v)\,dv$ je Rimanov integral za fiksirano u ako on postoji, ili pak neki broj između $\underline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv$ i $\overline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv$ (ne izuzimajući te granice). Slično se objašnjava i $\int_{I'} f(u,v)\,du$.

Dokaz.

Podelimo svaki od segmenata $[a_i,b_i]$, $i = 1,\dots,n$, na p jednakih delova tačkama $a_i = x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^p = b_i$. Označimo $\frac{b_i - a_i}{p} = h_i$, $i = 1,\dots,n$. Ove podele indukuju podelu $P' = \{I_i' \mid i = 1,\dots,p^m\}$ segmenta I' i podelu $P'' = \{I_j'' \mid j = 1,\dots,p^{n-m}\}$ segmenta I'', kao i podelu $P = \{I_{i,j}\}_{i,j}$, gde je $I_{i,j} = I_i' \times I_j''$, segmenta I. Pri tom je $\mu I_i' = h_1 h_2 \cdots h_m$, $\mu I_j'' = h_{m+1} h_{m+2} \cdots h_n$, $\mu I_{i,j} = h_1 h_2 \cdots h_n$. Ako se označi $m_{i,j} = \inf_{u \in I_i', v \in I_j''} f(u,v)$, $M_{i,j} = \sup_{u \in I_i', v \in I_j''} f(u,v)$, onda donja i gornja Darbuova suma imaju oblik

$$s(f,P) = \sum_{i,j} m_{i,j} h_1 h_2 \cdots h_n, \quad S(f,P) = \sum_{i,j} M_{i,j} h_1 h_2 \cdots h_n.$$

Kako je funkcija $f(u,v)$ integrabilna na I, to postoji zajednički limes od $s(f,P)$ i $S(f,P)$ kad $p \to \infty$, tj. postoji $\int_I f(u,v)\,du\,dv$.

S druge strane, ako se sa $\varphi\colon I' \to \mathbf{R}$ označi proizvoljna funkcija koja zadovoljava uslov

$$\underline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv \leqslant \varphi(u) \leqslant \overline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv, \qquad u \in I',$$

onda se slično kao u teoremi 1 pokazuje da je

$$\int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I'} \varphi(u)\,du.$$

Na isti način se dokazuje jednakost

$$\int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I''} \left(\int_{I'} f(u,v)\,du\right) dv. \quad \blacksquare$$

Posledica 5.4.1

Za integral $\int_I f(x)\,dx$ integrabilne funkcije $f(x_1,\dots,x_n)$ na segmentu $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ važi jednakost

$$(6) \qquad \int_I f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n.$$

Dokaz.

Primena teoreme 2 na integral $\int_I f(x)\,dx$ daje

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{I'} f(x_1,u)\,du,$$

gde je $u = (x_2,\dots,x_n)$, $I' = [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$. Sukcesivnom primenom teoreme 2 još $n-2$ puta dobija se tvrđenje. $\blacksquare$

PRIMER 5.4.2

Izračunajmo vrednost integrala

$$J = \int_I (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

gde je $I = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, n\}$.

Prema posledici 1 imamo

$$\int_I (x_1+x_2+\cdots+x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)\, dx_n,$$

pa je

$$J = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2}\right) dx_{n-1}.$$

Induktivno se dobija $J = n/2$. ▲

Posmatrajmo funkciju $f: D \to \mathbf{R}$, gde je $D \subset \mathbf{R}^n$ ograničen skup. Pretpostavimo da se taj skup može napisati u obliku

$$D = \{(u, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid u \in D_u,\ \varphi_1(u) \leqslant x_n \leqslant \varphi_2(u)\},$$

gde je $u = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ i $D_u \subset \mathbf{R}^{n-1}$ merljiv skup. Neka je $I = I_u \times I_{x_n}$ segment koji sadrži D i pri tom je $D_u \subset I_u \subset R^{n-1}$. Definišimo funkciju $g: I \to \mathbf{R}$ tako da je

$$g(u, x_n) = \begin{cases} f(u, x_n), & \text{za } (u, x_n) \in D, \\ 0, & \text{za } (u, x_n) \in I \setminus D. \end{cases}$$

Ako je skup D merljiv i funkcija f je na njemu integrabilna, onda je, uzevši u obzir definiciju funkcije g,

$$J = \int_D f(u, x_n)\, du\, dx_n = \int_I g(u, x_n)\, du\, dx_n.$$

Prema teoremi 2 je

$$J = \int_{I_u} \left(\int_{I_{x_n}} g(u, x_n)\, dx_n \right) du.$$

Uzevši u obzir da za fiksirano $u \in D_u$ imamo

$$\int_{I_{x_n}} g(u, x_n)\, dx_n = \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} g(u, x_n)\, dx_n$$

i da je $g(u, x_n) = 0$ za $u \in I_u \setminus D_u$, to je

$$J = \int_{D_u} \left(\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} f(u, x_n)\, dx_n \right) du.$$

Dakle, imamo još jednu posledicu teoreme 2.

POSLEDICA 5.4.2

Neka se $D \subset \mathbf{R}^n$ može napisati u obliku

$$D = \{(u, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid u \in D_u,\ \varphi_1(u) \leqslant x_n \leqslant \varphi_2(u)\},$$

gde je $D_u \subset \mathbf{R}^{n-1}$ merljiv skup. Ako je $f: D \to \mathbf{R}$ integrabilna funkcija, onda važi jednakost

$$\int_D f(u, x_n)\, du\, dx_n = \int_{D_u} du \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} f(u, x_n)\, dx_n. \quad (7)$$ ■

Primetimo da se jednakost (7) može napisati u obliku

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{D_u} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int_{\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

Pri tom je D_u projekcija skupa $D \subset \mathbf{R}^n$ na potprostor $Ox_1 \ldots x_{n-1}$.

Sukcesivnom primenom posledice 2 na integral $\int_D f(x)\, dx$ dobija se njegova vrednost.

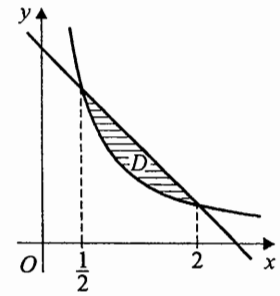
PRIMERI 5.4.3

1° Integral $J = \iint_D xy\, dx\, dy$, gde je D oblast ograničena linijama $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$, napisaćemo prema jednakosti (7) u obliku

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\, dy.$$

Kako je

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y\, dy = \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{1}{x^2}\right),$$



Sl. 5.4.1

to je

$$J = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x^3 - 5x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{1}{x}\right) dx = 1\frac{37}{128} - \ln 2.$$

2° Nađimo zapreminu V elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ $(a, b, c > 0)$.

Prema formuli (1) odeljka 2 zapremina se izračunava integralom $V = \iiint_V 1 \cdot dx\, dy\, dz$. Iz jednakosti (7) imamo

$$V = \iint_{V_{xy}} dx\, dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz, \quad (8)$$

gde je V_{xy} projekcija elipsoida na ravan Oxy, tj. $V_{xy} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1\}$.

Primenjujući još jednom jednakost (7) na integral (8) dobija se

$$V = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Sukcesivno izračunavanje ova tri integrala daje zapreminu

$$V = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy = bc\int_{-a}^{a} \pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc. \quad \blacktriangle$$

5.5. SMENA PROMENLJIVIH

Izračunavanje Rimanovog integrala neke funkcije na segmentu nekad je olakšano uvođenjem nove promenljive. Isti slučaj je i sa n-integralom — nekada se izračunavanje n-integrala može uprostiti pomoću smene promenljivih.

Pre izučavanja smene promenljivih kod n-integrala razmotrićemo neka pitanja bijektivnog preslikavanja oblasti prostora $\mathbf{R}^n$ u prostor $\mathbf{R}^n$. Posebno, to će biti pitanja vezana za odnos mere oblasti koja se preslikava i njene slike.

Neka je oblast Δ u prostoru $\mathbf{R}^n$ sa koordinatnim sistemom $O\xi_1 \dots \xi_n$, a D je oblast u prostoru $\mathbf{R}^n$ sa koordinatnim sistemom $O'x_1 \dots x_n$.

Pretpostavimo da je data funkcija $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ pomoću koordinatnih funkcija

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Neka φ zadovoljava sledeće uslove:

(2) 1° φ bijektivno preslikava Δ na D;

2° funkcije φ_i i parcijalni izvodi $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, neprekidni su na $\overline{\Delta}$.

Može se pokazati (zadatak 13) da iz uslova (2) sledi da za jakobijan

$$\det d\varphi(\xi) = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

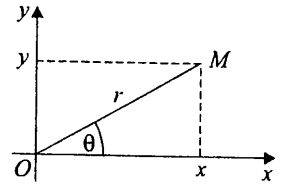
važi ili nejednakost $\det d\varphi(\xi) \geqslant 0$ ili nejednakost $\det d\varphi(\xi) \leqslant 0$, za $\xi \in \Delta$.

Tada svakoj n-torci $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ u oblasti Δ odgovara tačno jedna n torka $(x_1, \dots, x_n)$ u oblasti D, tako da $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ određuje položaj tačke $M(x_1, \dots, x_n)$ u oblasti D. Dakle, brojeve $\xi_1, \dots, \xi_n$ možemo smatrati koordinatama tačke M. Kaže se još da formule (1) transformišu oblast Δ u oblast D.

PRIMERI 5.5.1

1° Transformacija polarnih koordinata r, θ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$) u Dekartove x, y ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) data je jednakostima (v. primer 2.2.1)

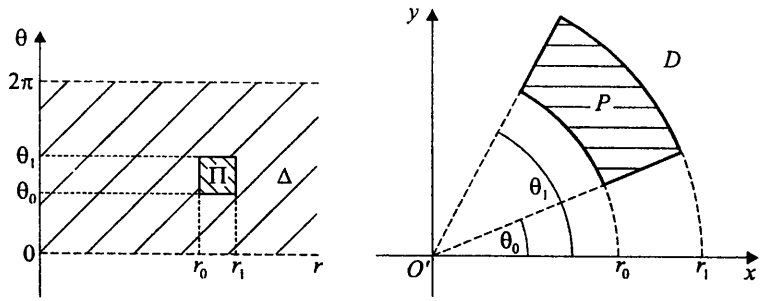
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{3}$$



Sl. 5.5.1

Geometrijska interpretacija ovih jednakosti lako je vidljiva na sl. 1. Svakoj tački M različitoj od koordinatnog početka odgovara tačno jedan par vrednosti r, θ ($r > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$).

Zadržavajući jednu od koordinata r, θ konstantnom dobijaju se *koordinatne linije* u ravni. Tako za $r = r_0$, koordinatna linija ima oblik $x^2 + y^2 = r_0^2$, a za $\theta = \theta_0$ koordinatna linija je poluprava $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta_0$. Kroz svaku tačku ravni, sem koordinatnog početka, prolazi jedan par koordinatnih linija.



Sl. 5.5.2

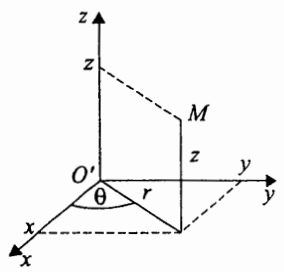
Sada ćemo dati još jednu interpretaciju transformacije (3). U ravni $Or\theta$ uočimo oblast

$$\Delta = \{(r, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\},$$

a u ravni $O'xy$ oblast D kojoj pripadaju sve tačke ravni osim tačaka nenegativnog dela ose $O'x$, sl. 2. Neka je $f\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ preslikavanje dato jednakostima (3). Pri tom se oblast Δ (šrafirana na sl. 2) preslikava na oblast D. Jakobijan $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ ima vrednost r (v. primer 2.2.1). Dakle je $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} \geqslant 0$ za $(r,\theta) \in \overline{\Delta}$ i $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} > 0$ za $(r,\theta) \in \Delta$. Prave $r = r_0$ i $\theta = \theta_0$ se preslikavaju u krug $x^2 + y^2 = r_0^2$, odnosno polupravu $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta_0$. Otvoreni pravougaonik $\Pi \subset \Delta$, ograničen pravim $r = r_0$,

$r = r_1$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, preslikava se u otvoreni „krivolinijski četvorougao“ $P \subset D$, ograničen krugovima $x^2+y^2 = r_0^2$, $x^2+y^2 = r_1^2$ i polupravim $y = x\operatorname{tg}\theta_0$, $y = x\operatorname{tg}\theta_1$, sl. 2. Prema zadatku 13 je $f(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $f(\partial\Pi) = \partial P$.

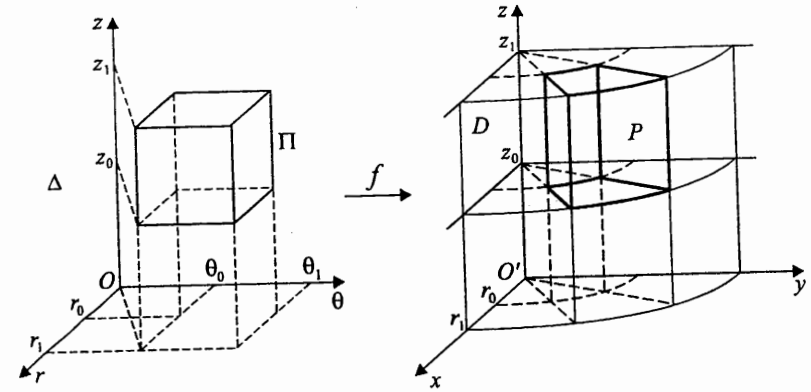
2° Transformacija polarno cilindričnih koordinata r, θ, z ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$) u Dekartove x, y, z ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$) data je jednakostima



Sl. 5.5.3

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z. \tag{4}$$

Geometrijska interpretacija ovih jednakosti može se lako videti. Svakoj tački M, različitoj od koordinatnog početka O', dodeljuje se tačno jedna trojka brojeva r, θ, z, sl. 3. Zadržavajući jednu koordinatu konstantnom dobijaju se *koordinatne površi* u prostoru $O'xyz$. Za $r = r_0$, koordinatna površ ima oblik $x^2+y^2 = r_0^2$ (cilindar). Druge dve koordinatne površi za $\theta = \theta_0$ i $z = z_0$ su oblika $y = x\operatorname{tg}\theta_0$ (poluravan), odnosno $z = z_0$ (ravan).



Sl. 5.5.4

Preslikavanje dato jednakostima (4) možemo interpretirati kao preslikavanje $f\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$, gde je

$$\Delta = \{(r,\theta,z) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}$$

oblast u prostoru $Or\theta z$, a D je prostor $O'xyz$ bez tačaka zatvorene poluravni $y = 0$, $x \geqslant 0$. Jakobijan

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

je pozitivan u oblasti Δ i nenegativan u $\overline{\Delta}$. Otvoreni paralelepiped $\Pi \subset \Delta$ ograničen ravnima $r = r_0$, $r = r_1$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $z = z_0$, $z = z_1$ preslikava se u otvoreni „krivi paralelepiped“ P, sl. 4. Pri tom je $f(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $f(\partial\Pi) = \partial P$.

3° U Dekartovom koordinatnom sistemu $O'xyz$ tački M možemo dodeliti sferne koordinate r, φ, θ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$), čija je veza sa Dekartovim koordinatama data jednakostima

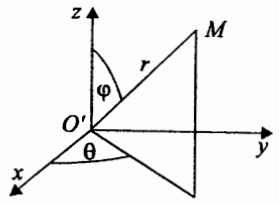
(5)
$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi.$$

Svakoj tački, izuzev koordinatnog početka, dodeljuje se tačno jedna trojka (r,φ,θ), koja određuje položaj tačke, sl. 5. Kroz svaku tačku prolaze tri koordinatne površi:

(a) za $r = r_0$ — sfera $x^2+y^2+z^2 = r_0^2$,

(b) za $\varphi = \varphi_0$ — polukonus $x^2+y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\varphi_0$,

(c) za $\theta = \theta_0$ — poluravan $y = x\operatorname{tg}\theta_0$.

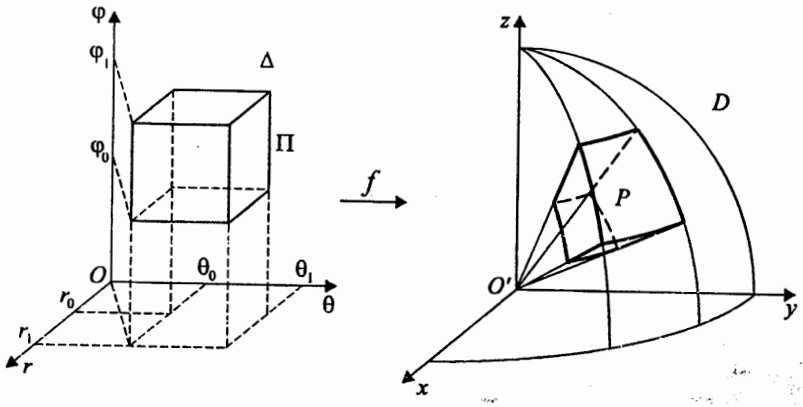


Sl. 5.5.5

S druge strane, preslikavanje (5) interpretiramo u obliku $f\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$, gde je

$$\Delta = \{(r,\varphi,\theta) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\},$$

a D je prostor $O'xyz$ bez tačaka zatvorene poluravni $y = 0$, $x \geqslant 0$. Jakobijan $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$ (v. primer 2.2.1) pozitivan je u oblasti Δ, a nenegativan u $\overline{\Delta}$. Otvoreni paralelepiped $\Pi \subset \Delta$, ograničen ravnima $r = r_0$, $r = r_1$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, preslikava se u otvoreni „krivi paralelepiped“ $P \subset D$, sl. 6. Pri tom je $f(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $f(\partial\Pi) = \partial P$.



Sl. 5.5.6

4° Preslikavanje φ ravni $O\xi\eta$ na ravan $O'xy$, dato jednakostima

$$x = a\xi + b\eta, \quad y = c\xi + d\eta, \quad J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6}$$

zadovoljava uslove (2). Uočimo proizvoljan pravougaonik Π sa stranicama dužine h, odnosno k, paralelnim koordinatnim osama. Njegova slika $f(\Pi) = P$ je paralelogram u ravni $O'xy$. Ako sa $\mu\Pi$ i μP označimo površine pravougaonika Π, odnosno paralelograma P, lako se proverava da je $\mu P = hk|J|$, tj. $\mu P = |J|\mu\Pi$. ▲

U prethodnom primeru videli smo odnos između površine pravougaonika i površine slike tog pravougaonika ako je funkcija koja preslikava ravan u kojoj se pravougaonik nalazi oblika (6). Sada ćemo isti problem posmatrati u slučaju opštije funkcije.

Stav 5.5.1

Neka je Δ merljiva oblast u prostoru $O\xi_1 \dots \xi_n$, D merljiva oblast u prostoru $O'x_1 \dots x_n$ i $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ preslikavanje dato jednakostima (1), koje zadovoljava uslove (2). Ako se neki kub (n-dimenziona kocka) $\Pi \subset \Delta$, ivice h, preslikava na $\varphi(\Pi) = P \subset D$, onda važi jednakost

$$\mu P = |J(\xi)| \cdot \mu\Pi + O\big(h^n \cdot \omega(h)\big), \tag{7}$$

gde je $J(\xi)$ vrednost jakobijana $\det d\varphi(\xi) = \dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ u proizvoljnoj tački $\xi \in \Pi$ i

$$\omega(h) = \sup_{\substack{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\ \|\xi-\eta\|<h \\ i,j=1,\dots,n}} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|. \tag{8}$$

Pri tom je konstanta u izrazu $O\big(h^n \cdot \omega(h)\big)$ nezavisna od $\Pi \subset \Delta$.

Dokaz.

Dokaz će biti izveden u slučaju $n = 2$. Za $n > 2$ izvodi se slično. Dakle, dokazaćemo jednakost

$$\mu P = |J(\xi)| \cdot \mu\Pi + O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big), \quad \xi \in \Pi. \tag{9}$$

Iznećemo najpre ideju dokaza.

Neka je $\Pi = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_i^0 < \xi_i < \xi_i^0 + h,\ i = 1,2\}$ kvadrat u ravni $O\xi_1\xi_2$ sa temenima u tačkama $E(\xi_1^0, \xi_2^0)$, $F(\xi_1^0 + h, \xi_2^0)$, $G(\xi_1^0 + h, \xi_2^0 + h)$, $H(\xi_1^0, \xi_2^0 + h)$ i granicom Γ. Slika $\varphi(\Pi) = P \subset D$ kvadrata je krivolinijski četvorougao $KLMN$ sa granicom $\varphi(\Gamma) = C$. Temena E, F, G, H se preslikavaju u K, L, M, N, respektivno. Preslikavanje φ, dato jednakostima

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \\ x_2 &= \varphi_2(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \tag{1'}$$

napisaćemo, koristeći Tejlorov obrazac, u obliku

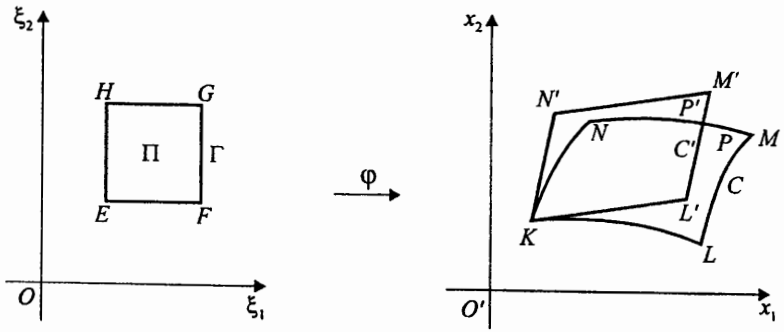
$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*}(\xi_1 - \xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*}(\xi_2 - \xi_2^0), \\ x_2 &= x_2^0 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*}(\xi_1 - \xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*}(\xi_2 - \xi_2^0). \end{aligned} \tag{10}$$

Pri tom je $x_i^0 = \varphi_i(\xi_1^0, \xi_2^0)$, a $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right)_{\xi^*}$ je vrednost funkcije $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$ u nekoj tački $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*) \in \Pi$, $i, j = 1, 2$.

Zajedno sa (10) posmatrajmo i linearno preslikavanje φ' koje preslikava $\overline{\Delta}$ u ravan $O'x_1x_2$, definišano sa

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^0 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}(\xi_1 - \xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}(\xi_2 - \xi_2^0), \\ x_2' &= x_2^0 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}(\xi_1 - \xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}(\xi_2 - \xi_2^0), \end{aligned} \tag{11}$$

gde je $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right)_{\xi_0} = \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi_1^0, \xi_2^0)$, $i, j = 1, 2$. Ovo preslikavanje preslikava kvadrat Π na paralelogram P' čija granica je C'. Slike temena E, F, G, H su, respektivno, K, L', M', N', sl. 7.



Sl. 5.5.7

Pokazaćemo da se μP i $\mu P'$ proizvoljno malo razlikuju za dovoljno malo h, a zatim ćemo uporediti $\mu\Pi$ sa $\mu P'$, dobijajući time traženo tvrđenje.

U cilju dokaza stava, najpre za proizvoljno $\xi \in \overline{\Pi}$ nađimo jednu gornju granicu rastojanja tačaka $x = (x_1, x_2)$ i $x' = (x_1', x_2')$ čije su koordinate date jednakostima (10) i (11). Iz

$$x_i - x_i' = \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*} - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}\right](\xi_1 - \xi_1^0) + \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*} - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}\right](\xi_2 - \xi_2^0),$$

$i = 1, 2$, zadatka 9.32 iz M.A.I i oznake (8) sledi

$$|x_i - x_i'| \leqslant 2\omega(h\sqrt{2})h \leqslant 2\omega(2h)h \leqslant 4\omega(h)h, \quad i = 1, 2.$$

Odavde za $\|x - x'\|$ imamo

$$\|x - x'\| = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2} \leqslant \sqrt{16\omega^2(h)h^2 + 16\omega^2(h)h^2} < 6\omega(h)h,$$

gde $\omega(h) \to 0$ za $h \to 0$. Naime, primetimo da iz uslova neprekidnosti funkcija $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}$ $(i, j = 1, 2)$ na $\overline{\Delta}$, za modul neprekidnosti $\omega_{\partial\varphi_i/\partial\xi_j}(h)$ važi

$$\lim_{h\to 0} \omega_{\partial\varphi_i/\partial\xi_j}(h) = 0,$$

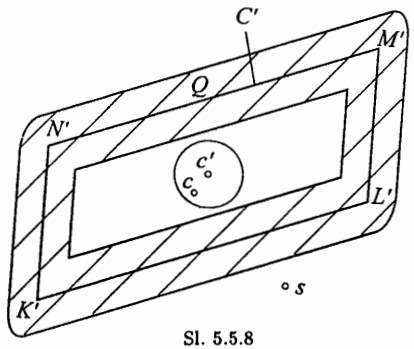
a iz jednakosti

$$\omega(h) = \sup_{\substack{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\,\|\xi-\eta\|<h \\ i,j=1,2}} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|$$

$$= \sup_{i,j=1,2} \left[\sup_{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\,\|\xi-\eta\|<h} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|\right]$$

sledi $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$.

Označimo $6\omega(h)h = r$. Uočimo sve krugove $K(x', r)$, sa centrom u nekoj tački $x' \in C'$ i poluprečnikom r. Pretpostavimo da je svaka od visina h_1, h_2 paralelograma P' veća od $4r$.



Sl. 5.5.8

Skup $\bigcup_{x'\in C'} K(x', r)$ označimo sa Q. Primetimo da je $P' \setminus Q$ paralelogram i da je $C \subset Q$, sl. 8. Dokažimo da je

$$P' \setminus Q \subset P \subset P' \cup Q. \tag{12}$$

Zaista, neka je c' centar paralelograma P'. Zbog $h_1, h_2 > 4r$, krug $K(c', r)$ se ceo sadrži u $P' \setminus Q$. S druge strane, kako je $d(x, x') < r$ za svako x, to postoji tačka $c \in K(c', r)$ za koju je $c \in P$. Kada bi skup $P' \setminus Q$ sadržao neku tačku $e \notin P$, onda bi segment $\overline{ce}$ morao seći granicu C. Ta presečna tačka bi pripadala skupu $P' \setminus Q$ zbog njegove konveksnosti, što je nemoguće, jer sve tačke granice C pripadaju Q. Dakle je $P' \setminus Q \subset P$.

S druge strane, u cilju dokaza inkluzije $P \subset P' \cup Q$, pretpostavimo suprotno: postoji tačka $s \in P \setminus (P' \cup Q)$. No, tada postoje $\sigma \in \Pi$ i $s' \in P'$, tako da je $\varphi(\sigma) = s$, $\varphi'(\sigma) = s'$, $d(s, s') < r$. Kontradikcija. Ovim je dvostruka inkluzija (12) dokazana.

Na osnovu (12) neposredno sledi

$$\mu P = \mu P' + \theta \cdot \mu Q, \qquad -1 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{13}$$

U cilju izračunavanja vrednosti μQ, nađimo koordinate temena paralelograma P' — to su $K(x_1^0, x_2^0)$,

$$L'\left(x_1^0 + h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0},\ x_2^0 + h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}\right),$$

$$N'\left(x_1^0 + h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0},\ x_2^0 + h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}\right).$$

Označavajući $\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_i}\right)^2_{\xi_0} + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_i}\right)^2_{\xi_0}} = m_i$, $i = 1, 2$, za dužine stranica paralelograma $KL'M'N'$ se dobija $KL' = hm_1$, $KN' = hm_2$, pa se lako procenjuje μQ,

$$\mu Q \leqslant 2m_1 h \cdot 2r + 2m_2 h \cdot 2r + 4\pi r^2 = 4r[(m_1 + m_2)h + \pi r].$$

Kako su φ_i, $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$, $i, j = 1, 2$, neprekidne na $\overline{\Delta}$, a zajedno s njima i m_i i $\omega(h)$, to je

$$\mu Q \leqslant Ch^2\omega(h), \tag{14}$$

gde je C konstanta koja ne zavisi od ξ^0 i h.

Iz primera 1.4° sledi $\mu P' = |J(\xi^0)| \cdot \mu\Pi$, pa iz (13) i (14) imamo

$$\mu P = |J(\xi^0)| \cdot \mu\Pi + O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big).$$

Lako se pokazuje da ova jednakost važi i ako se ξ^0 zameni proizvoljnim $\xi \in \Pi$, tj. važi (9).

Pretpostavimo sada da je $h_i \leqslant 4r$ bar za jedno $i \in \{1, 2\}$.

Tada je $\mu P' \leqslant m_i h \cdot 4r = 24 m_i h^2 \cdot \omega(h) = O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big)$, pa je (primetimo da inkluzija $P \subset P' \cup Q$ važi i u ovom slučaju)

$$\mu P \leqslant \mu P' + \mu Q \leqslant O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big) + O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big) = O\big(h^2 \cdot \omega(h)\big).$$

Način dokazivanja stava za $n > 2$ ostaje isti, s tim što se na odgovarajućim mestima vrše sitne izmene, uzimajući u obzir da se radi o prostoru $\mathbf{R}^n$, $n > 2$. ■

Koristeći stav 1 dokazaćemo *teoremu o smeni promenljive u n-integralu.*

Teorema 5.5.1

Neka je Δ merljiva oblast u prostoru $O\xi_1 \dots \xi_n$, D merljiva oblast u prostoru $O'x_1 \dots x_n$ i $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ preslikavanje dato jednakostima (1), koje zadovoljava uslove (2).

Ako je $f \in \mathcal{R}(D)$, onda važi jednakost

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta F(\xi) \cdot |J(\xi)|\,d\xi, \tag{15}$$

gde je $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = f\big(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)\big) = F(\xi)$ *i* $J(\xi) = \dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}$.

Dokaz.

Neka je $T = \{I^i\}_i$ podela oblasti Δ; pri tom su I^i kubovi ivice h ili delovi tih kubova. Označimo $\varphi(I^i) = V^i \subset D$. Kako je $\varphi(\partial I^i) = \partial V^i$ (v. zadatak 13), prema posledici 1.1 i primeru 1.2.5°, skupovi V^i su merljivi po Žordanu i čine podelu T' skupa D. Izaberimo $\eta^i \in I^i$ proizvoljno i označimo $\varphi(\eta^i) = y^i$. Po pretpostavci postoji

$$\lim_{h\to 0} \sum_i f(y^i)\cdot \mu V^i = \lim_{\lambda(T')\to 0} \sum_i f(y^i)\cdot \mu V^i = \int_D f(x)\,dx.$$

Prema stavu 1 je

$$\text{(16)} \qquad \sum_i f(y^i)\cdot \mu V^i = \sum_i F(\eta^i)\big(|J(\eta^i)|\cdot \mu I^i + O(h^n\cdot\omega(h))\big)$$
$$= \sum_i F(\eta^i)|J(\eta^i)|\cdot \mu I^i + \sum_i F(\eta^i)\cdot O(h^n\cdot\omega(h)).$$

Iz ograničenosti funkcije F sledi da je, za neku konstantu M,

$$\left|\sum_i F(\eta^i)\cdot O(h^n\cdot\omega(h))\right| \leqslant M\omega(h)\sum_i h^n \leqslant M\cdot\mu\Delta\cdot\omega(h).$$

Kako je $\lim_{h\to 0}\omega(h) = 0$, iz (16) za $h\to 0$ sledi

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta F(\xi)|J(\xi)|\,d\xi. \quad \blacksquare$$

Primeri 5.5.2

1° Izračunajmo integral $J = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, po elipsoidu

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}, \qquad a,b,c>0.$$

Veoma jednostavno integral se izračunava prelaskom na *uopštene sferne koordinate* po formulama $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\varphi$ ($0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta<2\pi$). Kako je jakobijan $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi$, to je

$$J = abc\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4\,dr = \frac{4}{5}\pi abc.$$

2° Izračunajmo površinu figure u ravni Oxy ograničene krivom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, a, b, h, $k>0$.

Površina je data integralom $P = \iint_D dx\,dy$, gde je oblast D ograničena datom krivom. Napišimo jednačinu krive u obliku

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}.$$

U integralu P izvršimo smenu promenljivih

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h} = r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k} = r\sin\varphi.$$

Jednačina krive postaje $r = \sqrt{\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}}$, a vrednost jakobijana je $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$. Uzevši ovo u obzir imamo

$$P = ab\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}}} r\,dr = \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3° Izračunajmo meru μT^n n-dimenzionalnog simpleksa

$$T^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0, x_1+\cdots+x_n\leqslant a\}, \quad a>0.$$

U integralu

$$I_n(a) = \int_{T^n} dx_1\dots dx_n = \int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1} dx_2\dots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

izvršimo smenu $x_1 = a\xi_1,\dots,x_n = a\xi_n$. Tada je $J(\xi) = a^n$ i formula (15) daje

$$I_n(a) = a^n\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1} d\xi_2\dots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n,$$

što ćemo napisati u obliku

$$I_n(a) = a^n\int\cdots\int_{\substack{\xi_1\geqslant 0,\dots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\cdots+\xi_n\leqslant 1}} d\xi_1\dots d\xi_n = a^n I_n(1).$$

Primenom teoreme 4.2 na ovaj integral imamo

$$I_n(a) = a^n\int_0^1 d\xi_n\int\cdots\int_{\substack{\xi_1\geqslant 0,\dots,\xi_{n-1}\geqslant 0\\ \xi_1+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n}} d\xi_1\dots d\xi_{n-1}$$
$$= a^n\int_0^1 I_{n-1}(1-\xi_n)\,d\xi_n = a^n\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}I_{n-1}(1)\,d\xi_n$$
$$= a^n I_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}\,d\xi_n = \frac{a^n}{n}I_{n-1}(1).$$

Odavde je

$$I_n(1) = \frac{1}{n}I_{n-1}(1) = \frac{1}{n!},$$

pa je

$$\mu T^n = I_n(a) = \frac{a^n}{n!}.$$

4° Za izračunavanje mere μK^n n-dimenzionalne kugle poluprečnika R,

$$K^n = \{\,(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\,\},$$

u integralu $\mu K^n = \int_{K^n} dx_1 \dots dx_n$ uvešćemo *n-dimenzionalne sferne koordinate* pomoću

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1, && 0 \leqslant r \leqslant R,\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, && 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, && 0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, && 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi,\\
x_n &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, && 0 \leqslant \varphi_{n-1} < 2\pi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Jakobijan $J = \dfrac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ izračunaćemo koristeći rezultat primera 3.3.1. Naime, relacije (17) napisaćemo u obliku

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv r^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = 0,\\
F_2 &\equiv r^2\sin^2\varphi_1 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
F_n &\equiv r^2\sin^2\varphi_1\cdots\sin^2\varphi_{n-1} - x_n^2 = 0.
\end{aligned}$$

Jakobijani

$$\begin{aligned}
\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})} &= 2^n r^{2n-1}\sin^{2n-3}\varphi_1\cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1},\\
\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} &= (-1)^n 2^n x_1\cdots x_n\\
&= (-1)^n 2^n r^n\sin^{n-1}\varphi_1\cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1},
\end{aligned}$$

kao trougaone determinante, računaju se neposredno. Na osnovu formule primera 3.3.1 imamo

$$J = (-1^n)\frac{\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}}{\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\mu K^n &= \int_0^R r^{n-1}\,dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\dots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\\
&= \frac{2\pi R^n}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\dots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}.
\end{aligned}$$

Koristeći formule primera 8.4.1 iz M.A.I dobija se

$$\mu K^n = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!}R^{2m}, & \text{za } n = 2m,\\[2ex] \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1}, & \text{za } n = 2m+1. \end{cases}$$

Drugi način dobijanja ovog rezultata pokazaćemo u primeru 7.4.1. ▲

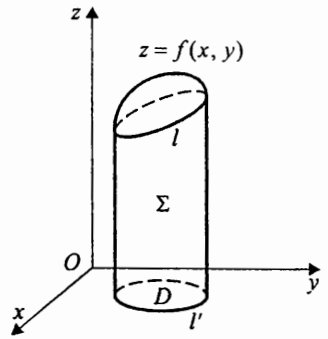
5.6. PRIMENA INTEGRALA

Na nekoliko primera pokazaćemo kako se metode integralnog računa koriste u geometriji i mehanici. Prilikom primene integrala smatraćemo da su oblasti po kojima vršimo integraciju merljive, a da to posebno ne naglašavamo.

Izračunavanje zapremine

Neka je $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $z \geqslant 0$, površ u prostoru $Oxyz$, sl. 1. Sa l' označimo granicu oblasti D. Cilindarska površ sa vodiljom l' i izvodnicama paralelnim osi Oz seče površ $z = f(x,y)$ po krivoj l. Sa V označimo zapreminu tela Σ ograničenog pomenutom cilindarskom površi, oblašću D i površi $z = f(x,y)$. Tada je

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1}$$



Sl. 5.6.1

Naime, prema formuli (4) odeljka 2 je

$$V = \iiint_\Sigma dx\,dy\,dz,$$

što se na osnovu jednakosti (5) odeljka 4 može napisati kao

$$V = \iint_D dx\,dy\int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ako je jednačina površi $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$, $z \leqslant 0$, onda je zapremina V gore opisanog tela data formulom

$$V = -\iint_D \varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Primer 5.6.1

Telo Σ u prostoru $Oxyz$ ograničeno je paraboloidom $z = x^2 + y^2$, cilindarskim površima $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ i Oxy-ravni. Sa D označimo oblast između krugova $x^2 + y^2 = x$ i $x^2 + y^2 = 2x$. Zapremina V tela Σ data je integralom

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Uzevši u obzir da jednačine datih krugova u polarnom koordinatnom sistemu imaju oblik $r = \cos\theta$ i $r = 2\cos\theta$, smenom promenljivih x, y sa r, θ dobija se

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3\,dr = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{45}{32}\pi. \quad \blacktriangle$$

Mera površi

Neka je $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, jednačina površi S. Pri tom su funkcija f i njeni parcijalni izvodi $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidni na merljivom skupu D. Uočimo proizvoljnu podelu $T = \{\, V^i \mid i = 1, \dots, k \,\}$ skupa D i u svakom elementu V^i izaberimo tačku (ξ_i, η_i). U tački (ξ_i, η_i, ζ_i), gde je $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$, konstruišimo tangentnu ravan date površi. Sa Σ^i označimo deo tangentne ravni koji se projektuje na V^i za $i = 1, \dots, k$. Ako sa γ_i označimo ugao između tangentne ravni i ravni Oxy, onda je

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\eta_i)}}.$$

Mera (površina) μS površi S definiše se kao limes

$$\mu S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \mu\Sigma^i.$$

Ako primetimo da je $\mu V^i = \mu\Sigma^i \cdot \cos\gamma_i$, onda je

$$\mu S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i,\eta_i) + f'^2_y(\xi_i,\eta_i)} \cdot \mu V^i,$$

odnosno

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}\,dx\,dy.$$

Koristeći oznake $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$, poslednju jednakost pišemo u obliku

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy. \tag{2}$$

Podintegralni izraz u jednakosti (2) naziva se *elementom površine*. Označimo li ga sa dS, imamo

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy, \quad \text{odnosno} \quad \mu S = \iint_D dS.$$

Primer 5.6.2

Izračunajmo površinu P sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Posmatrajući gornju polusferu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i imajući u vidu da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

prema formuli (2) imamo

$$P = 2R \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy.$$

Prelazeći na polarne koordinate dobijamo

$$P = 2R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R^2. \quad \blacktriangle$$

Ako je površ S data implicitno jednačinom $F(x,y,z) = 0$ i ako je $F'_z \neq 0$ za $(x,y) \in D$, onda, uzevši u obzir da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

za površinu μS površi S imamo

$$\mu S = \iint_D \frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,dx\,dy.$$

Na kraju, pretpostavimo da je površ S data parametarski

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \qquad (u,v) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2,$$

gde su φ, ψ, χ, kao i njihovi parcijalni izvodi, neprekidni. Pretpostavimo da je bar jedan od tri jakobijana $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ različit od nule. Neka je, određenosti radi, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ za $(u,v) \in \Delta$.

Setimo se da vektor normale tangentne ravni u tački (x,y,z) ima oblik

$$\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right).$$

Uzevši u obzir da vektor normale tangentne ravni površi $z = f(x,y)$ u tački (x,y,z) ima oblik $(p,q,-1)$, vršeći smenu $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ u integralu

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy,$$

dobija se

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big/\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big/\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv,$$

gde se oblast Δ funkcijom $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ preslikava bijektivno na D. Odavde sledi da je mera μS površi S data izrazom

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,du\,dv.$$

Koristeći oznake za Gausove koeficijente površi (v. odeljak 4.8)

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

lako se izračunava da se μS može napisati u obliku

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{3}$$

Element površine u ovom slučaju dat je izrazom

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Primer 5.6.3

Nađimo površinu dela sfere između dva meridijana i dve paralele.

Neka je poluprečnik sfere R poznat. Napišimo jednačinu sfere u parametarskom obliku, birajući u $(0 \leqslant u < 2\pi)$ kao dužinu meridijana i v $(-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2)$ kao širinu paralele,

$$x = R\cos u\cos v, \quad y = R\sin u\cos v, \quad z = R\sin v.$$

Sa Δ označimo skup $\{(u,v) \mid u_1 \leqslant u \leqslant u_2, v_1 \leqslant v \leqslant v_2\}$, a sa S odgovarajući deo sfere. Izračunajmo najpre

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -R\sin u\cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = R\cos u\cos v, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -R\cos u\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -R\sin u\sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = R\cos v,$$

odakle je $EG - F^2 = R^4\cos^2 v$, pa je

$$\mu S = \iint_\Delta R^2\cos v\,du\,dv = R^2\int_{u_1}^{u_2} du\int_{v_1}^{v_2}\cos v\,dv$$
$$= R^2(u_2 - u_1)(\sin v_2 - \sin v_1). \quad \blacktriangle$$

Masa tela

Posmatrajmo telo mase m u delu V prostora $\mathbf{R}^3$ sa koordinatnim sistemom $Oxyz$. Odnos $\frac{m}{\mu V}$ naziva se *srednjom gustinom* datog tela. Uočimo proizvoljnu tačku $A(x,y,z)$ i proizvoljnu loptu $K(A,\varepsilon)$ u skupu V. Gustina $\rho(A)$ tela u tački A je, po definiciji,

$$\rho(A) = \rho(x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m_K}{\mu K(A,\varepsilon)},$$

gde je m_K masa lopte $K(A,\varepsilon)$.

Ako je $\rho(A) = \text{const}$, telo je homogeno. U tom slučaju veza između mase m, gustine ρ i zapremine μV tela je data jednakošću $m = \mu V\rho$.

Pretpostavimo da je telo u skupu V nehomogeno i da mu je gustina $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$, poznata. Nađimo masu m tela.

U tom cilju posmatrajmo proizvoljnu podelu $T = \{V^i \mid i = 1,\dots,k\}$ skupa V i izaberimo u svakom elementu V^i istaknutu tačku (ξ_i,η_i,ζ_i), $i = 1,\dots,k$. Birajući dijametar δV^i dovoljno malim, možemo V^i smatrati približno homogenim telom sa gustinom $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. U tom slučaju masa m_i elementa V^i iznosi $m_i = \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i$, $i = 1,\dots,k$. Ako se izvrši sumiranje $\sum_{i=1}^{k} m_i$ dobiće se približna vrednost mase m tela. Prelaskom na limes

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{k}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i$$

dobija se masa m tela, tj.

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Primer 5.6.4

Telo je oblika kocke $V = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$ i gustine $\rho(x,y,z) = x + y + z$. Nađimo masu m ovog tela.

Prema gore dobijenoj formuli imamo

$$m = \iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)\,dz = \frac{3}{2}a^4. \quad \blacktriangle$$

Moment inercije

Pod momentom inercije materijalne tačke u odnosu na pravu podrazumeva se proizvod mase tačke i kvadrata rastojanja tačke i prave. Moment inercije konačnog skupa materijalnih tačaka jednak je zbiru momenata inercije svih tačaka. U cilju definisanja i nalaženja momenta inercije tela postupa se na sledeći način.

Pretpostavimo da telo V u koordinatnom sistemu $Oxyz$ ima gustinu $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$. Podelimo V na male oblasti V^i, $i = 1, \dots, k$, i izaberimo istaknute tačke (ξ_i, η_i, ζ_i) u njima. Smatraćemo da moment inercije J_i u odnosu na osu Oz onog dela tela koje se nalazi u V^i, ima vrednost

$$J_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mu V^i.$$

Sumirajući i prelazeći na limes, dobija se po definiciji moment inercije J datog tela

$$J = \lim_{\max \delta V^i \to 0} \sum_{i=1}^{k} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mu V^i = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

PRIMER 5.6.5

Homogeno telo gustine $\rho = 1$ ograničeno je delom sfere $x^2+y^2+z^2 = 2$ i delom konusa $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$. Nađimo moment inercije J datog tela u odnosu na osu Oz.

Označimo

$$V = \{\,(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \leqslant z^2,\ z \geqslant 0\,\}.$$

Prema gornjoj formuli je

$$J = \iiint_V (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Prelaskom na polarno-cilindrične koordinate imamo

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\,dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5). \quad \blacktriangle$$

5.7. NESVOJSTVENI INTEGRAL

Pojam n-integrala definisanog na merljivim skupovima za ograničene funkcije uopštava se na slučajeve kada su podintegralna funkcija ili oblast integracije neograničeni. Oba slučaja posmatraćemo istovremeno.

Najpre ćemo dati pojam monotonog pokrivača neke oblasti u prostoru $\mathbf{R}^n$.

DEFINICIJA 5.7.1

Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ data oblast. Familija $\mathcal{D} = \{D^k \mid k = 1,2,\dots\}$ oblasti *monotono pokriva* oblast D ako su ispunjeni uslovi

1° $\bigcup_{k=1}^{\infty} D^k = D$;

2° $\overline{D^k} \subset D^{k+1}$ za $k = 1, 2, \dots$.

Familiju $\mathcal{D}$ ćemo nazivati *monotonim pokrivačem*.

PRIMERI 5.7.1

1° Sa D^k označimo

$$D^k = \{\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < k^2,\ k = 1,2,\dots\}.$$

Familija $\{\,D^k \mid k \in \mathbf{N}\,\}$ monotono pokriva prostor $\mathbf{R}^n$.

2° Uočimo proizvoljan rastući niz racionalnih brojeva $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$, većih od 1, takav da je $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$. Familija $\mathcal{D} = \{\,D^k \mid k \in \mathbf{N}\,\}$, gde je

$$D^k = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < \left(1 - \frac{1}{r_k}\right)^2 \right\}$$

monotono pokriva elipsoid $\{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2/4 + z^2/9 < 1\,\}$. $\blacktriangle$

DEFINICIJA 5.7.2

Neka je realna funkcija $f(x)$ definisana na oblasti $D \subset \mathbf{R}^n$ i integrabilna na svakom zatvorenom merljivom podskupu skupa D. Posmatrajmo sve monotone pokrivače oblika $\{\,D^k \mid k = 1,2,\dots\}$ koji imaju svojstvo da je svaki $\overline{D^k}$ merljiv skup. Ako za proizvoljan takav pokrivač postoji

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D^k} f(x)\,dx$$

i limes ne zavisi od izbora pokrivača, onda se ovaj limes naziva *nesvojstvenim integralom* funkcije f na skupu D i označava sa

$$\int_D f(x)\,dx, \qquad \text{ili} \qquad \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n.$$

Često se simbol $\int_D f(x)\,dx$ (ako je f ili D neograničeno) naziva nesvojstvenim integralom, pa se kaže da taj nesvojstveni integral konvergira, odnosno divergira, ako gore pomenuti limes postoji (kao konačan), odnosno ne postoji ili je beskonačan.

Nesvojstveni integral nenegativnih funkcija

TEOREMA 5.7.1

Neka je $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$ i $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Da bi nesvojstveni integral $\int_D f(x)\,dx$ konvergirao, potrebno je i dovoljno da bar za jednu familiju $\mathcal{D} = \{\,D^k \mid k = 1,2,\dots\}$ koja monotono pokriva oblast D i gde su $\overline{D^k}$ merljivi skupovi, niz $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, $a_k = \int_{D^k} f(x)\,dx$, bude ograničen.

Dokaz.

Ako $\int_D f(x)\,dx$ konvergira, niz $(a_k)_k$ je konvergentan, dakle i ograničen.

Pretpostavimo da je niz $(a_k)_k$ ograničen. Kako iz $\overline{D^k} \subset \overline{D^{k+1}}$ i $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$ sledi $\int_{D^k} f(x)\,dx \leqslant \int_{D^{k+1}} f(x)\,dx$, to je taj niz rastući, pa postoji konačan $\lim_{k\to\infty} a_k = I$.

Uočimo neku drugu familiju $\{ E^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ koja monotono pokriva oblast D i označimo

$$b_k = \int_{\overline{E^k}} f(x)\,dx.$$

Neka je $k_0 \in \mathbf{N}$ proizvoljno. Nađimo k tako da je $\overline{E^{k_0}} \subset D^k$. Takvo k postoji. Naime, kada ne bi postojalo, onda bi za svako $k \in \mathbf{N}$ postojala tačka $x^k \in \overline{E^{k_0}} \setminus D^k$. Kako je $\overline{E^{k_0}}$ zatvoren i ograničen, tj. kompaktan skup, niz $(x^k)_k$ sadrži konvergentan podniz (v. M.A.I, posledica 9.5.1) koji teži nekoj tački $x^0 \in \overline{E^{k_0}}$. Tačka x^0, zajedno sa nekom okolinom $U(x^0)$ nalazi se u jednom od skupova D^m. No tada tom skupu D^m (pa i svim skupovima D^{m_1} za $m_1 > m$) pripada beskonačno mnogo tačaka x^k, što protivreči pretpostavci $x^k \notin D^k$, $k \in \mathbf{N}$.

Pri ovakvom izboru broja k je i $b_{k_0} \leqslant a_k \leqslant I$. Dakle je $(b_k)_k$ ograničen niz. Kao rastući, ovaj niz ima limes; neka je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = I'$. Iz prethodnog sledi da je $I' \leqslant I$. Zamenjujući uloge nizovima (a_k) i (b_k) dobijamo nejednakost $I \leqslant I'$, odakle sledi $I = I'$. ■

Primer 5.7.2

Za izračunavanje integrala

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

uočimo familiju $\{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$, $D^k = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < k^2 \}$. Tada je

$$a_k = \iint_{\overline{D^k}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Posle prelaska na polarne koordinate imamo

$$a_k = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k r e^{-r^2}\,dr = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Očito je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \pi$.

Primetimo da se dati nesvojstveni integral može izračunati i kao

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\overline{E^k}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

gde je $E^k = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -k < x < k, -k < y < k \}$, $k = 1, 2, \dots$. Iz

$$\iint_{\overline{E^k}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx \int_{-k}^{k} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

sledi

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

i zatim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Ovaj integral obično se naziva *Ojler-Poasonovim* integralom.* ▲

* S. D. Poisson (1781–1840), francuski fizičar i matematičar

Navedimo sada nekoliko kriterijuma poređenja za ispitivanje konvergencije nesvojstvenih integrala.

Teorema 5.7.2

Neka su f i g dve nenegativne realne funkcije definisane u oblasti $D \subset \mathbf{R}^n$, integrali $\int_D f(x)\,dx$, $\int_D g(x)\,dx$ su nesvojstveni i važi nejednakost $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in D$. Ako $\int_D g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i $\int_D f(x)\,dx$.

Dokaz.

Za monotoni pokrivač $\{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ skupa D, niz $\left(\int_{\overline{D^k}} g(x)\,dx \right)_k$ konvergira. Kako je

$$\int_{\overline{D^k}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\overline{D^k}} g(x)\,dx,$$

to je niz $\left(\int_{\overline{D^k}} f(x)\,dx \right)_k$ ograničen, pa kako je i monoton, on je i konvergentan. ■

Posledica 5.7.1

Ako funkcije f i g zadovoljavaju uslove teoreme 2 i $\int_D f(x)\,dx$ divergira, onda i $\int_D g(x)\,dx$ divergira. ■

Stav 5.7.1

Ako je $f(x) \geqslant 0$, $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, $\int_D f(x)\,dx$ konvergira i $E \subset D$ ima monoton pokrivač, onda $\int_E f(x)\,dx$ konvergira i važi nejednakost

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_D f(x)\,dx.$$

Dokaz.

Konstruišimo funkciju $\varphi\colon D \to \mathbf{R}$ formulom

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in E, \\ 0, & \text{za } x \in D \setminus E. \end{cases}$$

Očito je $\varphi(x) \leqslant f(x)$ za $x \in D$, odakle sledi

$$\int_D \varphi(x)\,dx \leqslant \int_D f(x)\,dx.$$

S druge strane, za proizvoljan monoton pokrivač $\{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ skupa D važi

$$\int_{\overline{D^k \cap E}} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_{\overline{D^k}} \varphi(x)\,dx.$$

Prelaskom na limes za $k \to \infty$ imamo

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_D f(x)\,dx.$$ ■

Nesvojstveni integral funkcija promenljivog znaka

Ispitivanje nesvojstvenih integrala funkcija promenljivog znaka počnimo jednom definicijom.

DEFINICIJA 5.7.3

Nesvojstveni integral $\int_D f(x)\,dx$ *apsolutno konvergira* ako konvergira $\int_D |f(x)|\,dx$.

TEOREMA 5.7.3

Nesvojstveni n-integral, $n \geqslant 2$, konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira u običnom smislu.

Dokaz.

Pretpostavimo da je realna funkcija f definisana u oblasti $D \subset \mathbf{R}^n$. Sa f_+ i f_- označimo funkcije definisane formulama

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}, \quad x \in D.$$

Drugačije to možemo napisati u obliku

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{za } f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{za } f(x) < 0, \end{cases} \quad x \in D.$$

Sledeće nejednakosti

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \quad x \in D, \tag{1}$$

kao i jednakosti

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

očigledne su.

Ako $\int_D f(x)\,dx$ apsolutno konvergira, tj. ako $\int_D |f(x)|\,dx$ konvergira, onda prema (1) i teoremi 2 konvergiraju $\int_D f_+(x)\,dx$ i $\int_D f_-(x)\,dx$. Na osnovu jednakosti (2) lako se vidi da konvergira i $\int_D f(x)\,dx$.

Obratno, neka konvergira $\int_D f(x)\,dx$. Pretpostavimo, suprotno, da $\int_D |f(x)|\,dx$ divergira. Kako je $|f(x)| \geqslant 0$, to $\int_D |f(x)|\,dx$ divergira ka beskonačnosti i možemo naći monotoni pokrivač $\{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ skupa D, tako da je

$$\int_{\overline{D^{k+1}}} |f(x)|\,dx > 3 \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + 2k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Označimo $D^{k+1} \setminus \overline{D^k} = E^k$. Iz (3) sledi

$$\int_{\overline{E^k}} |f(x)|\,dx > 2 \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + 2k. \tag{4}$$

Koristeći (2) imamo

$$\int_{\overline{E^k}} |f(x)|\,dx = \int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx + \int_{\overline{E^k}} f_-(x)\,dx.$$

Od dva integrala na desnoj strani poslednje jednakosti, jedan je veći ili jednak drugom. Određenosti radi, pretpostavimo da je

$$\int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx \geqslant \int_{\overline{E^k}} f_-(x)\,dx.$$

Iz ove nejednakosti i (4) sledi

$$\int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k.$$

Izaberimo takvu podelu $T = \{V^i\}_i$ skupa $\overline{E^k}$ da bude

$$\sum_i m_i \cdot \mu V^i > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k, \qquad m_i = \inf_{x \in V^i} f_+(x).$$

Označimo $P^k = \bigcup_j \{ V^j \in T \mid m_j > 0 \}$, $\overline{D^k} \cup P^k = Q^k$. Tada je

$$\int_{P^k} f(x)\,dx = \int_{P^k} f_+(x)\,dx > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k. \tag{5}$$

Iz (5) i očigledne nejednakosti

$$\int_{\overline{D^k}} f(x)\,dx \geqslant -\int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx$$

sabiranjem sledi

$$\int_{Q^k} f(x)\,dx > k.$$

Familija skupova $\{ (Q^{2k})^\circ \mid k \in \mathbf{N} \}$ zadovoljava sve uslove da bi bila monotoni pokrivač skupa D, sem što skupovi $(Q^{2k})^\circ$ možda nisu povezani. Međutim, njihovom malom deformacijom, može se postići da važi i taj uslov, pri čemu ostaje na snazi poslednja nejednakost (za detalje videti, na primer, [27]). Na osnovu te nejednakosti onda sledi da je $\int_D f(x)\,dx$ divergentan. Kontradikcija. ■

Primetimo da dokazana teorema o apsolutnoj konvergenciji nesvojstvenog višestrukog integrala nije u kontradikciji sa poznatom činjenicom (v. primer 8.6.6 u M.A.I) da postoje obični (jednostruki) nesvojstveni integrali koji konvergiraju uslovno. Naime, poslednji deo dokaza u opštem slučaju za $n = 1$ ne može se sprovesti.

ZADACI

1. 1° Pokazati da skup mere nula nema unutrašnjih tačaka, a ako neki skup nema unutrašnjih tačaka, mera mu ne mora biti nula.

2° Ako je skup $A \subset \mathbf{R}^n$ takav da je $\mu(A) = 0$, onda je i $\mu(\overline{A}) = 0$. Da li odgovarajuće tvrđenje važi za Lebegovu meru?

2. Neka je $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$. Uporediti definiciju 8.1.2 iz M.A.I sa definicijom n-integrala za $n = 1$. Pokazati da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx, \quad a < b,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_I f(x)\,dx, \quad b < a.$$

3. 1° Ako je I segment u $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{R}(I)$ i $\{\, x \in I \mid f(x) \neq 0 \,\}$ ima Lebegovu meru nula, dokazati da je $\int_I f(x)\,dx = 0$.

2° Ako je $f\colon I \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija i $\{\, x \in I \mid f(x) \neq 0 \,\}$ ima Lebegovu meru nula, da li mora biti $f \in \mathcal{R}(I)$?

3° Ako je $A \subset \mathbf{R}^n$ merljiv po Žordanu, $f\colon A \to \mathbf{R}$ je nenegativna funkcija i $\int_A f(x)\,dx = 0$, dokazati da je $\{\, x \in A \mid f(x) \neq 0 \,\}$ Lebegove mere nula.

4. Dokazati da gornji i donji Darbuov integral ograničene funkcije f na merljivom skupu $D \subset \mathbf{R}^n$ predstavljaju limes gornje, odnosno donje Darbuove sume, kad parametar podele teži nuli.

5. Neka je f realna funkcija, definisana i ograničena na $P = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2$. Ako je $f(x_1, x_2)$ rastuća po x_i za fiksirano x_j, $i, j = 1, 2$, dokazati da je $f \in \mathcal{R}(P)$.

6. Funkcija f definisana je na $P = [0,1] \times [0,1]$ formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalno,} \\ 2y, & \text{ako je } x \text{ iracionalno.} \end{cases}$$

Dokazati:

1° Postoji $\underline{\int}_0^t f(x,y)\,dy$ za $0 \leqslant t \leqslant 1$ i

$$\int_0^1 \left(\underline{\int}_0^t f(x,y)\,dy \right) dx = t^2, \quad \int_0^1 \left(\overline{\int}_0^t f(x,y)\,dy \right) dx = t.$$

2° $\int_0^1 (\overline{\int}_0^1 f(x,y)\,dy)\,dx$ postoji (naći vrednost).

3° $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ ne postoji.

7. Dokazati nejednakost

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx \right]^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

gde je f neprekidna funkcija na $[a,b]$.

8. Neka je $f_i \in \mathcal{R}[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Ako je $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, dokazati jednakost

$$\int_D f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\,dx_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\,dx_n \right).$$

9. 1° Dokazati *Dirihleovu formulu*

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx \quad (a > 0)$$

za neprekidnu funkciju $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D = \{\, (x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant x \,\}$.

2° Neka je $f(x_1, \ldots, x_n)$ neprekidna realna funkcija na skupu $\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant a, i = 1, \ldots, n \,\}$, $n \geqslant 2$. Dokazati jednakost

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n = \int_0^a dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^a f\,dx_1.$$

3° Dokazati da za neprekidnu funkciju $f\colon [0,a] \to \mathbf{R}$ važi

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^a f(\xi)\,d\xi \right]^n.$$

10. Ako je $D \subset \mathbf{R}^n$, $\mu(D) > 0$, φ je neprekidna realna funkcija na D i $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je konveksna, dokazati da važi nejednakost

$$f\left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi(x)\,dx \right) \leqslant \frac{1}{\mu(D)} \int_D (f \circ \varphi)(x)\,dx.$$

11. 1° Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ merljiv skup i $D \subset I = I' \times I''$, gde su $I' \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $I'' \subset \mathbf{R}$ intervali i za $y_0 \in I''$ označimo $D_{y_0} = \{\, (x,y) \in D \mid y = y_0 \,\}$. Označimo sa $\overline{\mu}(D_y)$ $(n-1)$-dimenzionu meru skupa D_y, odnosno bilo koji broj između $\underline{\int}_{D_y} dx$ i $\overline{\int}_{D_y} dx$ (ako ta mera ne postoji). Dokazati da je

$$\mu(D) = \int_{I''} \overline{\mu}(D_y)\,dy.$$

2° Dokazati *Kavalijerijev* princip*: neka su A, $B \subset \mathbf{R}^3$ merljivi po Žordanu i neka za svako $c \in \mathbf{R}$ skupovi $A_c = \{\, (x,y,z) \in A \mid z = c \,\}$ i $B_c = \{\, (x,y,z) \in B \mid z = c \,\}$ imaju jednake površine; tada skupovi A i B imaju jednake zapremine.

12. Naći formule transformacije pri kojima oblast

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geqslant 1, xy \leqslant 2, x - y + 1 \geqslant 0, x - y - 1 \leqslant 0, x > 0 \,\}$$

prelazi u pravougaonik čije su stranice paralelne koordinatnim osama.

13. Neka funkcija $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ zadovoljava uslove teoreme 5.1. Dokazati:

1° ne postoje tačke η i ξ u oblasti Δ, tako da je $\det d\varphi(\eta) > 0$ i $\det d\varphi(\xi) < 0$ [videti, na primer, [31]].

2° ako je $\Pi \subset \Delta$ ograničena oblast i $\overline{\Pi} \subset \Delta$, tada je $P = \varphi(\Pi)$ takođe oblast i važi $\varphi(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $\varphi(\partial\Pi) = \partial P$.

* B. Cavalieri (1598–1647), italijanski matematičar

14. Izračunati $\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$.

15. Naći $f'(t)$ ako je

$$f(t)=\iint_D e^{tx/y^2}\,dx\,dy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant t, 0\leqslant y\leqslant t\}.$$

16. U uv-ravni dat je četvorougao s temenima $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$, $D(1,3)$. Preslikavanje uv-ravni u xy-ravan dato je jednačinama

$$x=u^2-v^2, \quad y=2uv. \tag{1}$$

1° Naći sliku četvorougla $ABCD$ u xy- ravni.

2° Izračunati integral $\iint_P xy\,dx\,dy$, koristeći smenu (1), gde je $P=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

17. 1° Odrediti Jakobijan *uopštenih polarnih*, odnosno *sfernih* koordinata

$$x=ar\cos^\alpha\theta, \quad y=br\sin^\alpha\theta, \qquad r\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi,$$

odnosno

$$x=ar\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \quad y=br\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta, \quad z=cr\cos^\alpha\varphi,$$
$$r\geqslant 0, \quad 0\leqslant\theta<2\pi, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

2° Naći zapreminu tela ograničenog površi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$.

18. Neka je $\Delta=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<\xi_1<1, -2\pi<\xi_2<2\pi\}$, $D=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x_1^2+x_2^2<e\}$ i $\varphi\colon\overline{\Delta}\to\overline{D}$ dato sa $\varphi(\xi_1,\xi_2)=(x_1,x_2)$, $x_1=e^{\xi_1}\cos\xi_2$, $x_2=e^{\xi_1}\sin\xi_2$. Pokazati da je

$$\iint_{\overline{D}} dx_1\,dx_2\neq\iint_{\overline{\Delta}}\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(\xi_1,\xi_2)}\right|d\xi_1\,d\xi_2.$$

Koji uslov teoreme 5.1 o smeni promenljivih nije ispunjen u ovom primeru?

19. Dokazati da se formula za površinu omotača obrtnog tela iz odeljka 8.5 u M.A.I dobija kao specijalan slučaj formule (3) odeljka 6.

20. Sledeći *Švarcov primer* pokazuje da se površina glatke površi u $\mathbf{R}^3$ ne može definisati kao limes površina upisanih poliedara u tu površ (za razliku od analogne situacije kod definicije dužine luka).

U prav kružni valjak poluprečnika R i visine H upišimo poliedar na sledeći način. Podelimo valjak ravnima paralelnim osnovama na m podudarnih valjaka visine H/m. Svaki od $m+1$ dobijenih krugova podelimo na n jednakih lukova, tako da se deone tačke na svakom krugu nalaze neposredno iznad (odn. ispod) sredine lukova susednih krugova. Spojimo zatim dužima na ovaj način dobijene „susedne" tačke. Unija dobijenih trouglova je poliedarska površ P. Dokazati:

(a) Površina površi P iznosi

$$\mu P=2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

(b) Kad $m, n\to\infty$, tada dijametri pojedinih trouglova teže nuli, ali je

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ n^2/m\to 0}}\mu P=\infty, \qquad \lim_{\substack{m,n\to\infty\\ m/n^2\to q}}\mu P=2\pi R\sqrt{\frac{1}{4}\pi^4R^2q^2+H^2},$$

tj. jedino u slučaju $q=0$ taj limes je jednak površini omotača datog valjka. Dakle, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\mu P$ ne postoji.

21. Naći meru: 1° n-dimenzionalne piramide

$$\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1, \quad x_i\geqslant 0 \quad \text{za } i=1,\ldots,n;$$

2° n-dimenzionalne kupe

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}\leqslant\frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n\leqslant a_n;$$

3° n-dimenzionalnog elipsoida

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leqslant 1.$$

22. Neka je $D\subset\mathbf{R}^n$ merljiv skup i $\{D^k\}$ monotoni pokrivač skupa D, takav da su $\overline{D^k}$ merljivi skupovi. Dokazati:

1° $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(\overline{D^k})=\mu(\overline{D})$;

2° ako je $f\in\mathcal{R}(\overline{D})$, tada je $f|\overline{D^k}\in\mathcal{R}(\overline{D})$ i važi $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\overline{D^k}}f(x)\,dx=\int_{\overline{D}}f(x)\,dx$.

23. Ispitati konvergenciju integrala $\int_D(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-p/2}\,dx_1\cdots dx_n$ ako je:

1° $D=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}$;

2° $D=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\geqslant 1\}$.

24. Izračunati integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\rho(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

gde je $\rho(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ pozitivno definitna forma.

25. Izračunati

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$$

za vrednosti parametara p, q, r za koje taj integral konvergira.

26. Pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{|x|,|y|\leqslant n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0,$$

tako da $\iint_{\mathbf{R}^2} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ divergira. Pokazati takođe da je

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

27. Ako je $D = [1,\infty)^2$ i $f\colon D \to \mathbf{R}$ data sa $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, dokazati da $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ divergira, mada konvergiraju oba uzastopna integrala

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{i} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty f(x,y)\,dx.$$

28. Dokazati teoremu o smeni promenljivih u nesvojstvenom integralu: ako su Δ, D oblasti u $\mathbf{R}^n$ i $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ funkcija data jednakostima (1) odeljka 5 koja zadovoljava uslove (2) tog odeljka na Δ. Ako je $f\colon D \to \mathbf{R}$ integrabilna na merljivim kompaktnim podskupovima skupa D i nesvojstveni integral $\int_D f(x)\,dx$ konvergira, tada i $\int_\Delta (f\circ\varphi)(\xi)|\det d\varphi(\xi)|\,d\xi$ konvergira i ima istu vrednost kao $\int_D f(x)\,dx$.

29. Dokazati da je $\iint_{\mathbf{R}^2} \dfrac{dx\,dx}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = 2\pi$.

6. KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI

Pojam određenog integrala, definisanog na segmentu prave linije, u prethodnoj glavi uopštili smo, proširujući integraciju na segment, odnosno merljiv skup u prostoru $\mathbf{R}^n$ za $n \geqslant 2$. U ovoj glavi uopštenja ćemo vršiti u drugom pravcu.

Kada se za oblast integracije uzme luk krive u prostoru, a podintegralna funkcija se definiše na tom luku, dolazi se do krivolinijskog integrala. Krivolinijski integrali koriste se, kako u matematici, tako i u primenama (u vezi sa izračunavanjem rada, cirkulacije fluida, izračunavanjem mase i dr.). Obično se posmatraju (u primenama se vide potrebe za to) dve vrste takvih integrala — krivolinijski integrali prve i druge vrste.

Ako se, umesto krive linije, za oblast integracije uzme površ u prostoru, a podintegralna funkcija se definiše na toj površi, dolazi se do pojma površinskog integrala, po mnogo čemu sličnog krivolinijskom. I površinski integrali imaju dosta primena. Posebno se ističe njihova primena u teoriji fluida.

Razlikovaćemo i kod ovih integrala dva oblika — površinske integrale prve i druge vrste.

Mi ćemo proučavati krivolinijske i površinske integrale u prostoru $\mathbf{R}^3$. Posebno, kada se govori o integraciji duž ravne krive, biće reči o krivolinijskim integralima u ravni. Zadržaćemo se i na nekim primenama krivolinijskih i površinskih integrala.

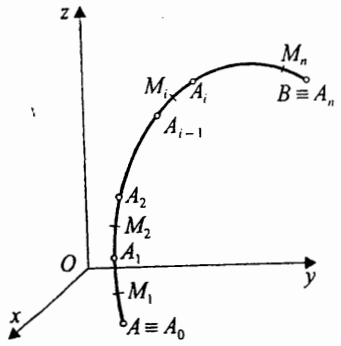
6.1. KRIVOLINIJSKI INTEGRAL PRVE VRSTE

Posmatrajmo u prostoru $Oxyz$ krivu L koja se može rektificirati i ne preseca sama sebe od tačke A do tačke B. Neka su njene jednačine date u obliku

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{1}$$

Neka je funkcija $f(x,y,z)$ definisana i ograničena na krivoj L. Podelimo segment $[\alpha,\beta]$ podelom T:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta.$$



Sl. 6.1.1

Svakoj vrednosti t_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, odgovara na krivoj tačka A_i s koordinatama x_i, y_i, z_i, gde je $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$. Specijalno, za $t = t_0$ i $t = t_n$ imamo tačke $A(x_0, y_0, z_0)$, odnosno $B(x_n, y_n, z_n)$. Na svakom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo vrednost τ_i parametra t. Ovoj vrednosti odgovara tačka $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, gde je $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sl. 1. Sa Δs_i označimo dužinu luka $A_{i-1}A_i$ krive L.

Sastavimo integralnu sumu

$$\sigma_1(f, L, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i. \tag{2}$$

Za broj I se kaže da je limes integralne sume $\sigma_1(f, L, T)$ kad $\max \Delta s_i \to 0$, u oznaci $\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T) = I$, ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $|\sigma_1(f, L, T) - I| < \varepsilon$ za $\max \Delta s_i < \delta$ i za proizvoljan izbor tačaka (ξ_i, η_i, ζ_i) na luku $A_{i-1}A_i$.

Definicija 6.1.1

Ako za funkciju $f(x, y, z)$, definisanu i ograničenu na luku L, postoji $\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T)$, onda se on naziva *krivolinijskim integralom prve vrste* funkcije $f(x, y, z)$ po krivoj L i označava sa

$$\int_L f(x, y, z)\, ds \quad \text{ili} \quad \int_{AB} f(x, y, z)\, ds.$$

Umesto o krivoj integracije, govori se još o luku ili putanji integracije.

Mi ćemo ubuduće pretpostavljati, ukoliko se ne kaže drugačije, da je kriva L deo-po-deo glatka i funkcija $f(x, y, z)$ ograničena na L i neprekidna u svim tačkama krive L sem njih konačno mnogo. Pokazuje se da u ovom slučaju integral $\int_L f(x, y, z)\, ds$ postoji.

Svojstva krivolinijskog integrala prve vrste

Krivolinijski integrali imaju niz svojstava kao i obični određeni integrali.

Stav 6.1.1

Neka je L luk krive između tačaka A i B, f i g su funkcije definisane na luku L i integrali $\int_L f(x, y, z)\, ds$ i $\int_L g(x, y, z)\, ds$ postoje. Tada važi

1° $\int_L (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))\, ds = \alpha \int_L f(x, y, z)\, ds + \beta \int_L g(x, y, z)\, ds$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2° $\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{AC} f(x, y, z)\, ds + \int_{CB} f(x, y, z)\, ds$, *gde je $C \in L$ tačka između tačaka A i B.*

3° $\left|\int_L f(x, y, z)\, ds\right| \leqslant \int_L |f(x, y, z)|\, ds$.

4° *Ako je $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$, $(x, y, z) \in L$, onda je $\int_L f(x, y, z)\, ds \leqslant \int_L g(x, y, z)\, ds$.*

Dokaz.

1° Sledi iz jednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]\Delta s_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i,$$

prelaskom na limes kad $\max \Delta s_i \to 0$.

2° Pri podeli luka AB tačkama A_i, kao jednu od deonih tačaka uzmimo tačku C i fiksirajmo je. Integralni zbir $\sigma_1(f, L, T)$ može se simbolički napisati u obliku

$$\sigma_1(f, L, T) = \sum_{AC} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + \sum_{CB} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

Prelaskom na limes kad $\max \Delta s_i \to 0$ dobija se tražena jednakost.

3° Sledi iz nejednakosti

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|\Delta s_i.$$

4° Iz nejednakosti $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \leqslant g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sledi $\sigma_1(f, L, T) \leqslant \sigma_1(g, L, T)$. ■

Primetimo da se na osnovu svojstva 2° iz ovog stava sve osobine krivolinijskih integrala, koje smo najpre definisali po nezatvorenim krivim, mogu preneti i na krive koje su zatvorene.

Stav 6.1.2

Ako je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija na luku L, onda postoji tačka $\overline{M}(\xi, \eta, \zeta)$ na luku L, tako da je

$$\int_L f(x, y, z)\, ds = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot s,$$

gde je s dužina luka L.

Dokaz.

Najpre primetimo da je $\int_L ds = s$. Naime, $\int_L ds = \int_L 1 \cdot ds$ po definiciji je limes zbira $\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i = s$.

Ako sa m, odnosno M, označimo infimum, odnosno supremum, funkcije $f(x, y, z)$ na luku L, onda je $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$ i, prema stavu 1,

$$ms = \int_L m\, ds \leqslant \int_L f(x, y, z)\, ds \leqslant \int_L M\, ds = Ms.$$

Odavde je

$$\frac{1}{s}\int_L f(x,y,z)\,ds = \mu, \qquad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $f(x,y,z)$ na luku L postoji tačka $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ tako da je $\mu = f(\xi,\eta,\zeta)$. ■

Integral $\int_L f(x,y,z)\,ds$ ne zavisi od orijentacije luka L.

Stav 6.1.3

Ako postoji $\int_{AB} f(x,y,z)\,ds$, *onda je*

$$\int_{BA} f(x,y,z)\,ds = \int_{AB} f(x,y,z)\,ds.$$

Dokaz.

Sledi iz činjenice da Δs_i u zbiru $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ ima isti znak na lukovima $A_{i-1}A_i$ i A_iA_{i-1}. ■

Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Teorema 6.1.1

Neka je kriva $L = AB$, *data jednačinama (1), glatka i nema singularnih tačaka, i neka je funkcija* $f(x,y,z)$ *neprekidna na luku* L. *Tada važi formula*

$$(3)\qquad \int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Dokaz.

Za podelu T: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta$ i izabrane tačke $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, zbir $\sigma_1(f,L,T)$ ima oblik

$$\sigma_1(f,L,T) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt,$$

gde je $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$ dužina luka $A_{i-1}A_i$. Uočimo integral

$$I = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$$

i pokažimo da se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može naći $\delta > 0$ tako da važi

$$\max|t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |\sigma_1(f,L,T) - I| < \varepsilon.$$

Zaista, iz neprekidnosti funkcija φ, ψ, χ, f sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da važi

$$|\tau - t| < \delta \implies |f(\varphi(\tau),\psi(\tau),\chi(\tau)) - f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))| < \frac{\varepsilon}{s},$$

gde je s dužina luka AB. Na osnovu ovih nejednakosti, za $\max\Delta t_i < \delta$ imamo

$$|\sigma_1(f,L,T) - I| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$$
$$< \frac{\varepsilon}{s}\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt = \varepsilon.$$

Primetimo još da $\max\Delta s_i \to 0$ povlači $\max\Delta t_i \to 0$. Zaista, kako se neprekidne funkcije φ', ψ', χ' ne anuliraju istovremeno na $[\alpha,\beta]$, važi

$$m = \min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)} > 0 \quad \text{i} \quad \Delta s_i \geqslant m\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = m\Delta t_i,$$

pa je $\Delta t_i \leqslant \Delta s_i/m$.

Time je dokazano da $\sigma_1(f,L,T) \to I$ za $\max\Delta s_i \to 0$. ■

Teorema važi i u slučaju da je kriva L deo-po-deo glatka i funkcija $f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ deo-po-deo neprekidna.

Primeri 6.1.1

1° Izračunajmo vrednost krivolinijskog integrala funkcije $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ duž krive L čije su jednačine $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Prema teoremi 1, za dati integral I imamo izraz

$$I = \int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt = \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}.$$

2° Izračunajmo integral $I = \int_L (x+y)\,ds$, gde je L trougao s temenima u tačkama $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Prema stavovima 1.2° i 3 imamo

$$I = \int_{OA}(x+y)\,ds + \int_{OB}(x+y)\,ds + \int_{BA}(x+y)\,ds.$$

Izračunavajući ova tri integrala, dobijamo:

$\int_{OA}(x+y)\,ds = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, gde je $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ jednačina segmenta OA i $ds = dx$;

$\int_{OB}(x+y)\,ds = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$, gde je $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ jednačina segmenta OB i $ds = dy$;

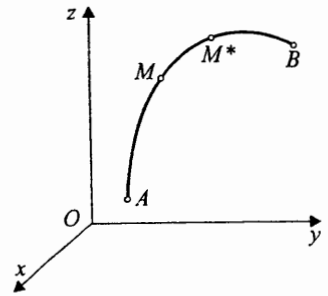
$\int_{BA}(x+y)\,ds = \int_0^1 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}$, gde je $y = 1-x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ jednačina segmenta BA i $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$.

Sabirajući dobijamo $I = 1+\sqrt{2}$.

3° Zamislimo luk $L = AB$ kao komad žice, načinjene od nehomogenog materijala. Ako sa A označimo početnu tačku luka, a sa B krajnju, i ako su jednačine luka AB date sa (1), onda sa $m(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, označimo masu žice, računajući od tačke $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ do tačke $M(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$. Tada je, na primer, $m(\alpha) = 0$. Uočimo tačku $M^*(\varphi(t + \Delta t), \psi(t + \Delta t), \chi(t + \Delta t))$. Sa Δs označimo dužinu luka MM^*. Po definiciji,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta s}$$

naziva se *linearnom gustinom* žice L u tački M, sl. 2.



Sl. 6.1.2

Pretpostavimo da je linearna gustina $\rho(x, y, z)$ žice L poznata u svakoj tački $M(x, y, z)$ i nađimo masu m žice L.

U tom cilju podelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n delova tačkama $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$. Na svakom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo tačku τ_i. Gustinu $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, gde je $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, n$, smatraćemo približno konstantnom na segmentu $[t_{i-1}, t_i] \ni \tau_i$. Po definiciji linearne gustine, masa m žice L biće približno jednaka zbiru

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

Smatraćemo da je masa m jednaka

$$m = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i = \int_L \rho(x, y, z)\, ds. \quad \blacktriangle$$

6.2. KRIVOLINIJSKI INTEGRAL DRUGE VRSTE

Neka je rektificibilna kriva L, koja ne preseca sama sebe, data jednačinama (1) odeljka 1 i $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ su definisane i ograničene funkcije na luku L. Kao i kod definisanja krivolinijskog integrala prve vrste, uočimo podelu T segmenta $[\alpha, \beta]$ tačkama t_i, i izaberimo vrednosti $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ parametra t, $i = 1, \ldots, n$. Vrednostima t_i, odnosno τ_i, odgovaraju tačke $A_i(x_i, y_i, z_i)$, odnosno $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, gde je $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Označimo još $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Sastavimo integralne sume

$$\sigma_2(P, L, T) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\sigma_3(Q, L, T) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\sigma_4(R, L, T) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i, .$$

Limesi ovih integralnih suma definišu se slično kao limes sume $\sigma_1(f, L, T)$.

DEFINICIJA 6.2.1

Ako za funkciju $P(x, y, z)$ $[Q(x, y, z), R(x, y, z)]$, definisanu i ograničenu na luku L, postoji limes sume $\sigma_2(P, L, T)$ $[\sigma_3(Q, L, T), \sigma_4(R, L, T)]$ kad $\max \Delta s_i \to 0$, onda se on naziva *krivolinijskim integralom druge vrste* funkcije $P(x, y, z)$ $[Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ po krivoj L i označava sa

$$\int_L P(x, y, z)\, dx \qquad \left[\int_L Q(x, y, z)\, dy, \quad \int_L R(x, y, z)\, dz\right],$$

ili

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx \qquad \left[\int_{AB} Q(x, y, z)\, dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)\, dz\right],$$

Zbir $\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + \int_{AB} Q(x, y, z)\, dy + \int_{AB} R(x, y, z)\, dz$ obično se piše u obliku

$$(1) \qquad \int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

i naziva (opštim) krivolinijskim integralom druge vrste.

Mi ćemo ubuduće pretpostavljati, ukoliko se drugačije ne kaže, da je kriva $L = AB$ deo-po-deo glatka i funkcije P, Q, R su neprekidne u svim tačkama krive L, sem njih konačno mnogo. Pokazuje se da u ovom slučaju integral (1) postoji.

Svojstva krivolinijskog integrala druge vrste

Navešćemo najpre svojstva koja su slična odgovarajućim svojstvima krivolinijskog integrala prve vrste i koja se i dokazuju na sličan način.

STAV 6.2.1

Neka je $L = AB$ luk krive, P i P_1 su funkcije definisane na luku AB i integrali $\int_{AB} P(x, y, z)\, dx$ i $\int_{AB} P_1(x, y, z)\, dx$ postoje. Tada važi:

1° $\int_L (\alpha P(x, y, z) + \beta P_1(x, y, z))\, dx = \alpha \int_L P(x, y, z)\, dx + \beta \int_L P_1(x, y, z)\, dx$;

2° $\int_{AB} P(x, y, z)\, dx = \int_{AC} P(x, y, z)\, dx + \int_{CB} P(x, y, z)\, dx$, *gde je C tačka luka AB između A i B.* ■

Stav 6.2.2

Ako je $P(x,y,z)$ neprekidna funkcija na luku AB, onda postoji tačka $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ na luku AB, tako da je

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = P(\xi,\eta,\zeta)(b-a),$$

gde je $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. ■

Krivolinijski integral II vrste zavisi od orijentacije krive po kojoj se vrši integracija.

Stav 6.2.3

Ako postoji $\int_{AB} P(x,y,z)\,dx$, onda je

$$\int_{BA} P(x,y,z)\,dx = -\int_{AB} P(x,y,z)\,dx.$$

Dokaz.

Sledi iz jednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(x_{i-1} - x_i). \quad ■$$

Primetimo da zbog svojstva izraženog u stavu 3 smatramo da je luk L, odnosno luk AB, orijentisan. U tom smislu ćemo integraciju funkcije po istom luku suprotne orijentacije od $L = AB$ označavati sa $\int_{L^-}$, odnosno $\int_{BA}$.

Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste

Teorema 6.2.1

Neka je kriva AB, data jednačinama (1) odeljka 1, glatka i nema singularnih tačaka i neka je funkcija $P(x,y,z)$ neprekidna na luku AB. Tada važi formula

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Dokaz.

Za podelu T: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ i izabrane tačke $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, zbir $\sigma_2(P,L,T)$ ima oblik

$$\sigma_2(P,L,T) = \sum_{i=1}^{n} P\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)\big)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)\,dt,$$

gde je $x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)\,dt$. Uočimo integral

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

i pokažimo da se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može naći $\delta > 0$, tako da važi

$$\max|t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |\sigma_2(P,L,T) - I| < \varepsilon.$$

Kako je funkcija φ' ograničena, $|\varphi'(t)| < K$, $t \in [\alpha,\beta]$, i iz neprekidnosti funkcija P, φ, ψ, χ sledi da za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da važi

$$|\tau - t| < \delta \implies \big|P\big(\varphi(\tau),\psi(\tau),\chi(\tau)\big) - P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\big| < \frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)},$$

to za $\max|t_i - t_{i-1}| < \delta$ važi

$$\begin{aligned}|\sigma_2(P,L,T) - I| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\big|P\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)\big) - P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\big|\cdot|\varphi'(t)|\,dt\\ &< \frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)}K(\beta-\alpha) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Kako $\max\Delta s_i \to 0$ povlači $\max\Delta t_i \to 0$ (v. dokaz teoreme 1.1), to odavde sledi da $\sigma_2(P,L,T) \to I$ za $\max\Delta s_i \to 0$. ■

Lako se pokazuje da uz odgovarajuće uslove važe jednakosti

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\chi'(t)\,dt,$$

kao i

$$(2)\quad \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta}\big[P(\dots)\varphi'(t) + Q(\dots)\psi'(t) + R(\dots)\chi'(t)\big]\,dt.$$

Jednakost (2) kraće se piše u obliku

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\alpha}^{\beta}\big[P\varphi'(t) + Q\psi'(t) + R\chi'(t)\big]\,dt.$$

Ona važi i u slučaju kada su funkcije φ, ψ, χ deo-po-deo glatke i funkcije $P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$, $Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$, $R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$ deo-po-deo neprekidne.

Primeri 6.2.1

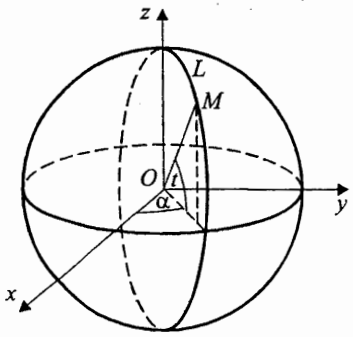
1° Izračunajmo

$$\int_L (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

gde je L luk parabole $y = x^2$ od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.

Za parametar krive uzmimo x. Jednakost (2) postaje ($R(x,y,z) = 0$)

$$\int_L (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy = \int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)\,dx = -\frac{14}{15}.$$



Sl. 6.2.1

2° Izračunajmo

$$I = \int_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

gde je L krug $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Pri tom smer integracije je suprotan kretanju kazaljke na časovniku, ako se gleda od pozitivnog smera ose Ox. U cilju nalaženja parametarskih jednačina kruga L uočimo tačku $M(x,y,z)$ u koordinatnom sistemu $Oxyz$, sl. 1. Za parametar izaberimo ugao t između vektora položaja tačke M i ravni Oxy. Tada jednačine kruga L imaju oblik

$$x = a\cos\alpha\cos t,\ y = a\sin\alpha\cos t,\ z = a\sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Prema formuli (2) imamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [-a^2(\sin\alpha\cos t - \sin t)\cos\alpha\sin t - a^2(\sin t - \cos\alpha\cos t)\sin\alpha\sin t \\ &\qquad + a^2(\cos\alpha\cos t - \sin\alpha\cos t)\cos t]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,dt = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Vektorska polja i krivolinijski integral

Često se, posebno u primenama, funkcije oblika

$$\mathbf{R}^n \supset X \to Y \subset \mathbf{R}^m, \qquad n \geqslant 2, \quad m \geqslant 1,$$

nazivaju *skalarnim* (za $m=1$), odnosno *vektorskim* (za $m \geqslant 2$) *poljima*. Kaže se još da je u skupu X zadato polje (skalarno, odnosno vektorsko). Skalarna i vektorska polja javljaju se često u fizici i tehnici. Tako se, na primer, govori o polju temperature, polju pritiska (skalarna polja), zatim o polju brzine, polju gravitacije (vektorska polja) i dr. Mi ćemo proučavati skalarna i vektorska polja za $m=1$, $n=3$, odnosno $m=n=3$. Koristićemo se često vektorskim oznakama, tako da ćemo skalarno polje $u = u(x,y,z)$ označavati i sa $u = u(\vec{r})$, gde je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektor položaja tačke (x,y,z) u prostoru $Oxyz$. Polje $u(x,y)$ u ravni Oxy označava se i sa $u = u(\vec{r})$, gde je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Konstantne vektore označavaćemo sa $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ itd. Norma vektora pri tom će biti označena sa $|\vec{r}| = r$, $|\vec{a}| = a$, ...

Za vektorsko polje $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ koristi se i oznaka $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, gde su $v_i = v_i(x,y,z)$, $i = 1,2,3$, funkcije od x, y, z, ili pak $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) = v_1(\vec{r})\vec{i} + v_2(\vec{r})\vec{j} + v_3(\vec{r})\vec{k}$.

Posmatrajmo sada vektorsko polje $\vec{v} = (P,Q,R)$, definisano na krivoj L, datoj jednačinama (1) odeljka 1. Izvod vektora položaja $\vec{r} = \vec{r}(t) = (\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ tačke $M(x,y,z)$ na krivoj L ima oblik $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$. Jednakost (2) možemo napisati u obliku

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{v}\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt,$$

gde je $d\vec{r} = (dx,dy,dz)$.

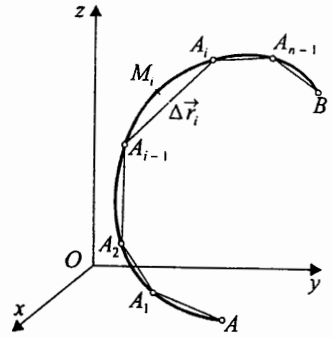
Ako je kriva L zatvorena, onda se $\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}$ naziva *cirkulacijom* vektora $\vec{v}$ po L i često označava i sa

$$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{r}.$$

Primer 6.2.2

Sila $\vec{v} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ deluje na materijalnu tačku premeštajući je po krivoj L iz tačke A u tačku B. Koliki rad vrši sila $\vec{v}$?

U cilju izračunavanja rada podelimo luk AB na n delova tačkama $A = A_0$, A_1, ..., $A_n = B$. Neka je kriva L data jednačinama (1) odeljka 1. Pretpostavimo da je na svakom od lukova $A_{i-1}A_i$ sila $\vec{v}$ približno konstantna i iznosi $\vec{v}_i = P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k}$, gde je $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ proizvoljno izabrana tačka na luku $A_{i-1}A_i$, $i = 1,\dots,n$. Posmatrajmo izlomljenu liniju $AA_1\dots A_{n-1}B$, sl. 2. Rad koji sila $\vec{v}_i$ izvrši premeštajući materijalnu tačku iz A_{i-1} u A_i po segmentu $A_{i-1}A_i$ iznosi $\vec{v}_i\cdot\Delta\vec{r}_i = \vec{v}_i\cdot(\vec{i}\Delta x_i + \vec{j}\Delta y_i + \vec{k}\Delta z_i)$, gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Ukupan rad koji sile $\vec{v}_i$ izvrše premeštajući materijalnu tačku iz A u B, po izlomljenoj liniji $AA_1\dots B$, iznosi



Sl. 6.2.2

$$\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k}]\cdot(\vec{i}\Delta x_i + \vec{j}\Delta y_i + \vec{k}\Delta z_i).$$

Limes ovog izraza kad $\max\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \to 0$ smatraćemo radom sile $\vec{v}$ duž luka AB. Očigledno, taj rad iznosi

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r}. \quad \blacktriangle$$

6.3. NEZAVISNOST INTEGRACIJE OD PUTANJE. GRINOVA TEOREMA

Krivolinijski integral $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se integracija vrši. Međutim, nekada to nije tako. Ako izraz $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije ili, drugačije rečeno, ako postoji skalarno polje $u(x,y,z)$, tako da je $\operatorname{grad} u = (P,Q,R)$, onda integral vektora (P,Q,R) po luku AB zavisi samo od tačaka A i B, a ne i od luka AB. Formulišimo ovo preciznije.

Teorema 6.3.1

Ako je u oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$ dato neprekidno vektorsko polje

$$\vec{v} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big),$$

onda su sledeća tvrđenja međusobno ekvivalentna:

1° *Postoji funkcija $u(x,y,z)$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima, definisana u oblasti V, tako da je $\operatorname{grad} u = \vec{v}$.*

2° *Krivolinijski integral $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ po putanji $AB \subset V$, gde su $A(x_0,y_0,z_0)$ i $B(x,y,z)$ početna, odnosno krajnja tačka te putanje, ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B. Vrednost integrala u tom slučaju je $u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)$.*

3° *Krivolinijski integral $\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ po proizvoljnoj zatvorenoj putanji $C \subset V$ jednak je nuli.*

Dokaz.

1° $\Longrightarrow$ 2°. Ako je $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, onda je

$$\vec{v}\cdot d\vec{r} = \operatorname{grad} u \cdot d\vec{r} = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Ako luk AB ima jednačine $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, onda je

$$\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt = \int_\alpha^\beta \frac{du}{dt}\,dt,$$

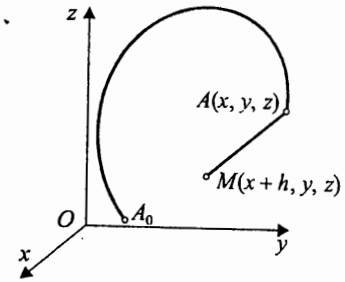
gde je $u = u\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$ funkcija promenljive t. Integracijom dobijamo

$$\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r} = u\big(\varphi(\beta),\psi(\beta),\chi(\beta)\big) - u\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\chi(\alpha)\big) = u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0).$$

Primetimo da u slučaju $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, podintegralni izraz $\vec{v}\cdot d\vec{r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz$ je vrednost diferencijala funkcije $u(x,y,z)$ za vrednost (dx,dy,dz) priraštaja nezavisno promenljive. Kraće kažemo da je taj izraz *totalni diferencijal* funkcije $u(x,y,z)$.

2° $\Longrightarrow$ 1°. Pretpostavimo da integral $\int_{A_0A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ne zavisi od izbora krive A_0A, gde je A_0 fiksirana tačka, nego samo od tačke $A(x,y,z)$. Označimo

$$\int_{A_0A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x,y,z).$$



Sl. 6.3.1

Pokažimo da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Uočimo tačku $M(x+h,y,z)$, sl. 1. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(x+h,y,z) - u(x,y,z)]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{A_0AM} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{A_0A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{AM} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.\end{aligned}$$

Uzimajući jednačine segmenta AM u obliku $x = t$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, $x \leqslant t \leqslant x+h$, dobija se

$$\int_{AM} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_x^{x+h} P(t,y,z)\,dt = h\cdot P(x+\theta h,y,z), \quad 0<\theta<1,$$

pa je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot hP(x+\theta h,y,z) = P(x,y,z).$$

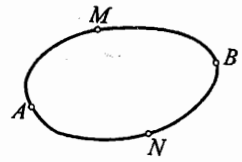
Slično je

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

2° $\Longleftrightarrow$ 3°. Neka je $C \subset V$ proizvoljna zatvorena kriva. Uočimo dve proizvoljne tačke A i B na toj krivoj, sl. 2. Tačke A i B rastavljaju krivu C na dva luka, AMB i ANB. Ako važi 2°, onda je

$$\int_{AMB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_{ANB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

odakle je



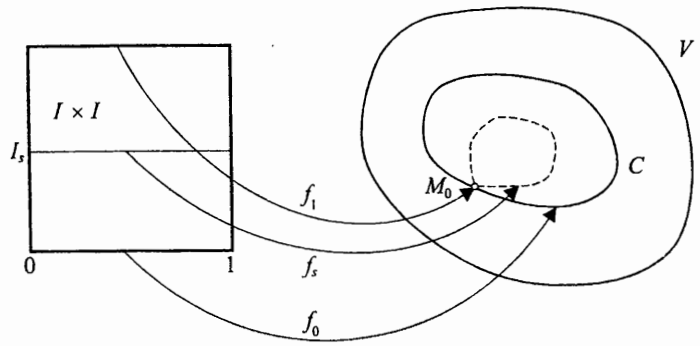
Sl. 6.3.2

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AMBNA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

pa važi 3°. Obrnuto je takođe jednostavno. ■

Da bismo problem izračunavanja krivolinijskog integrala, kada on ne zavisi od putanje, rešili u celini, naći ćemo još jedan kriterijum za raspoznavanje da li je podintegralna funkcija gradijent neke funkcije. Pre toga pomenimo pojam prosto povezane oblasti.

Oblast $V \subset \mathbf{R}^3$ je *prosto povezana* ako se svaka zatvorena deo-po-deo glatka kriva $C \subset V$ može „stegnuti" u proizvoljnu tačku $M_0 \in C$, ostajući pri tome u oblasti V. Ovom slikovitom izrazu „stegnuti u tačku" daćemo matematički oblik.



Sl. 6.3.3

Neka je $f_0\colon I \to V$ deo-po-deo glatko preslikavanje segmenta $I = [0,1]$ u oblast V, $f_0(0) = f_0(1) = M_0$ i $f_0(I) = C$, sl. 3. Ako postoji neprekidno preslikavanje $F\colon I \times I \to V$, tako da je

$$\begin{aligned} F(0,s) &= F(1,s) = M_0, && s \in [0,1], \\ F(t,0) &= f_0(t), && t \in [0,1], \\ F(t,1) &= f_1(t) = M_0, && t \in [0,1], \end{aligned}$$

onda se kaže da se kriva $C = f_0(I)$ *može stegnuti u tačku* M_0. Pri tom svaka kriva $f_s(I_s)$, $s \in (0,1)$, gde je $f_s(t) = F(t,s)$ i $I_s = \{(t,s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $s \in [0,1]$, jeste deo-po-deo glatka i nalazi se u V.

Na primer, može se proveriti da su unutrašnjost kruga i kvadrata prosto povezane oblasti u ravni $\mathbf{R}^2$, a da skup $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ to nije. U prostoru $\mathbf{R}^3$ primeri prosto povezanih oblasti su unutrašnjost lopte i kocke, kao i oblast ograničena dvema koncentričnim sferama. Unutrašnjost torusa nije prosto povezana oblast.

Teorema 6.3.2

Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija $\vec{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$. Potreban i dovoljan uslov da integral

$$\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad AB \subset V,$$

ne zavisi od putanje AB, jeste da su ispunjene jednakosti

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Dokaz.

$\Longrightarrow$. Ako $\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ ne zavisi od putanje, onda postoji funkcija $u(x,y,z)$ tako da je $\operatorname{grad} u = \vec{v}$, pa je $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. Kako su potrebni parcijalni izvodi funkcija P, Q, R neprekidni, to iz

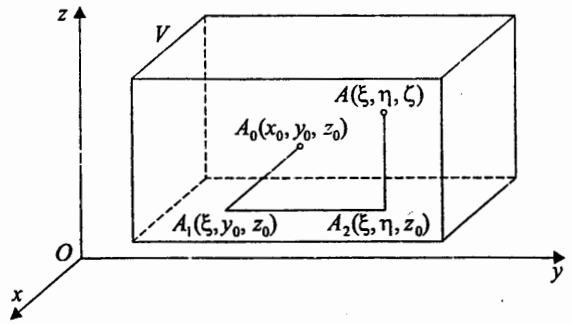
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

sledi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Slično se dokazuju ostale relacije (1).

Primetimo da u dokazu ove implikacije nismo koristili prostu povezanost oblasti V.



Sl. 6.3.4

$\Leftarrow$. Koristeći jednakosti (1) konstruisaćemo funkciju $u(x,y,z)$ za koju važi $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z)$.

Najpre pretpostavimo da oblast V predstavlja otvoreni pravougli paralelepiped. U paralelepipedu V uočimo proizvoljnu tačku $A_0(x_0,y_0,z_0)$ i promenljivu tačku $A(\xi,\eta,\zeta)$, sl. 4. Definišimo

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \int_{A_0A_1A_2A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Za izračunavanje krivolinijskog integrala na desnoj strani uzmimo za jednačine segmenata:

$$\begin{aligned} A_0A_1: &\quad x = t,\ y = y_0,\ z = z_0, &&x_0 \leqslant t \leqslant \xi;\\ A_1A_2: &\quad x = \xi,\ y = t,\ z = z_0, &&y_0 \leqslant t \leqslant \eta;\\ A_2A: &\quad x = \xi,\ y = \eta,\ z = t, &&z_0 \leqslant t \leqslant \zeta. \end{aligned}$$

Tada je

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \int_{x_0}^{\xi} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{\eta} Q(\xi,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{\zeta} R(\xi,\eta,t)\,dt.$$

Koristeći jednakosti (1), odavde dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= P(\xi,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{\eta} \frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \xi}(\xi,\eta,t)\,dt\\ &= P(\xi,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{\eta} \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta}(\xi,\eta,t)\,dt\\ &= P(\xi,y_0,z_0) + [P(\xi,\eta,z_0) - P(\xi,y_0,z_0)] + [P(\xi,\eta,\zeta) - P(\xi,\eta,z_0)]\\ &= P(\xi,\eta,\zeta). \end{aligned}$$

U prvom koraku ovog izvođenja vršili smo diferenciranje integrala $\int_{y_0}^{\eta} Q(\xi,t,z_0)\,dt$ i $\int_{z_0}^{\zeta} R(\xi,\eta,t)\,dt$ po ξ tako što smo po ξ diferencirali podintegralne izraze. Da je takav postupak opravdan dokazaćemo kasnije (v. stav 7.1.3).

Slično nalazimo

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = Q(\xi,\eta,\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = R(\xi,\eta,\zeta).$$

Dakle, vektor $\vec{v}$ se može napisati u obliku $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ i važi

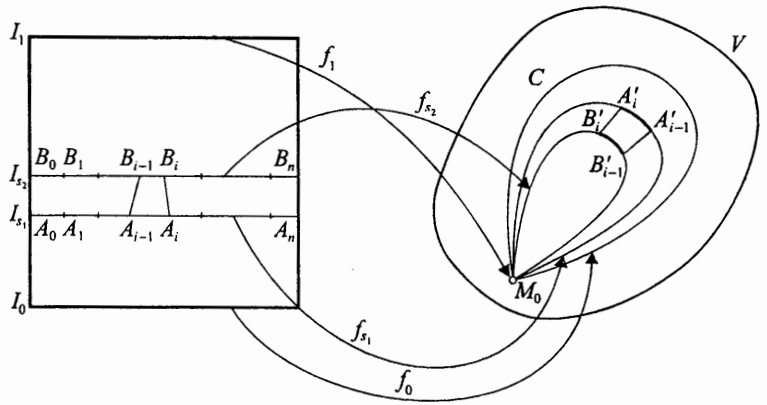
$$u(\xi,\eta,\zeta) = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

gde je L proizvoljan luk od tačke A_0 do promenljive tačke A.

Neka je sada V proizvoljna prosto povezana oblast. Uočimo proizvoljnu fiksiranu tačku $M_0(x_0,y_0,z_0)$ i promenljivu tačku $M(x,y,z)$ u oblasti V. Funkciju $u(x,y,z)$ definišimo kao krivolinijski integral

$$\int_{M_0M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

gde je M_0M proizvoljna kriva koja spaja tačke M_0 i M. Dokazaćemo da vrednost krivolinijskog integrala ne zavisi od izbora putanje koja spaja M_0 i M, što znači isto što i $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. No, za to je dovoljno pokazati da je vrednost krivolinijskog integrala $\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, duž proizvoljne, deo-po-deo glatke zatvorene krive $C \subset V$, jednaka nuli.



Sl. 6.3.5

Neka je M_0 tačka na krivoj C i $f_0\colon I \to V$, $I = [0,1]$, funkcija za koju je $f_0(I) = C$, $f_0(0) = f_0(1) = M_0$. Kako se kriva C može stegnuti u tačku M_0, to postoji neprekidna funkcija $F\colon I \times I \to V$, tako da je $F(0,s) = F(1,s) = M_0$, $F(t,0) = f_0(t)$, $F(t,1) = M_0$, za t, $s \in I$. Za proizvoljne $s_1, s_2 \in I$, segmente I_{s_1}, I_{s_2} (gde je $I_s = \{(t,s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ za $s \in [0,1]$) podelimo tačkama A_0, A_1, ..., A_n, odnosno B_0, B_1, ..., B_n, na po n delova. Označimo $f_{s_1}(A_i) = A_i'$, $f_{s_2}(B_i) = B_i'$, $i = 0, 1, \ldots, n$, gde je $f_s(t) = F(s,t)$ za s, $t \in [0,1]$. Izaberimo s_2 dovoljno blizu s_1, te podele na I_{s_1} i I_{s_2} dovoljno sitne, tako da se za svaki četvorougao $A_{i-1}A_iB_iB_{i-1}$ može naći pravougli paralelepiped $V_i \subset V$ koji sadrži putanju $A_{i-1}'A_i'B_i'B_{i-1}'A_{i-1}'$ (tačke A_0', B_0', A_n', B_n' se poklapaju sa M_0). Tada je

$$\oint_{A_{i-1}'A_i'B_i'B_{i-1}'A_{i-1}'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Sabiranjem za $i = 1, \dots, n$ dobijamo

$$\oint_{M_0A_1'\dots A_{n-1}'M_0} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_{M_0B_1'\dots B_{n-1}'M_0} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Dakle, krivolinijski integral po zatvorenoj krivoj $f_s(I_s)$ je konstantan (ne zavisi od $s \in [0,1]$). Kako je $f_1(I_1) = M_0$, to je

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Kako je C proizvoljna zatvorena kriva, to na osnovu teoreme 1 sledi tvrđenje. ■

Primeri 6.3.1

1° Izračunajmo krivolinijski integral

$$I = \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

gde je C krug $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Prelazeći na Rimanov integral, imamo

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{a^2} a\cos t \right) dt = 2\pi.$$

Izračunavajući parcijalne izvode funkcija $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, dobija se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Funkcije P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne su svugde, sem u tački $O(0,0)$. Oblast $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nije prosto povezana.

Prema teoremi 2, krivolinijski integral

$$\oint_{C^*} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

po krugu C^*, jednačine $(x-2a)^2 + y^2 = a^2$, jednak je nuli.

2° Izračunajmo krivolinijski integral

$$I = \int_{(a_1,a_2,a_3)}^{(b_1,b_2,b_3)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

gde je tačka $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ na sferi $x^2+y^2+z^2 = a^2$, a tačka $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ na sferi $x^2+y^2+z^2 = b^2$. Kako funkcije $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

zadovoljavaju uslove (1), to dati integral ne zavisi od putanje. Prema teoremi 2 nađimo funkciju $u(\xi,\eta,\zeta)$,

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \int_{a_1}^{\xi} \frac{t}{\sqrt{t^2+a_2^2+a_3^2}}\,dt + \int_{a_2}^{\eta} \frac{t}{\sqrt{\xi^2+t^2+a_3^2}}\,dt + \int_{a_3}^{\zeta} \frac{t}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+t^2}}\,dt$$
$$= \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} - \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

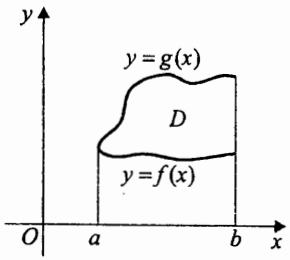
Dakle je

$$I = u(b_1,b_2,b_3) = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} - \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = b-a. \quad ▲$$

Grinova teorema

Veza između dvojnog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti data je *Grinovom* formulom.*

Uočimo prostu zatvorenu krivu $C \subset \mathbf{R}^2$ koja ograničava oblast D. Ako se C sastoji od delova grafika dveju neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, i eventualno delova pravih $x = a$ i $x = b$, onda ćemo D nazivati *elementarnom oblašću* u odnosu na osu Ox, sl. 6. Slično se definiše elementarna oblast u odnosu na osu Oy. Oblasti, elementarne u odnosu na ose Ox i Oy, nazivaćemo elementarnim oblastima.



Sl. 6.3.6

Teorema 6.3.3

Neka je $D \subset \mathbf{R}^2$ oblast ograničena deo-po-deo glatkom krivom C. Ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ na zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, onda važi jednakost

$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \tag{2}$$

Pri tom oznaka C^+ u krivolinijskom integralu označava da se integracija vrši u smeru pri kome tačke oblasti D ostaju s leve strane.

Dokaz.

Teoremu najpre dokažimo u slučaju kada je D elementarna oblast.

* G. Green (1793–1841), engleski matematičar

Pretpostavimo da je granica C oblasti D data jednačinama $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ i $x = a$, $f(a) \leqslant y \leqslant g(a)$, kao i $x = b$, $f(b) \leqslant y \leqslant g(b)$, sl. 7. Na krivoj C označimo tačke: $E(a, f(a))$, $F(b, f(b))$, $G(b, g(b))$, $H(a, g(a))$. Transformišimo izraz $\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$. Imamo

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))]\, dx \\ &= \int_a^b P(x, g(x))\, dx - \int_a^b P(x, f(x))\, dx \\ &= -\int_{GH} P(x, y)\, dx - \int_{EF} P(x, y)\, dx.\end{aligned}$$

Kako je

$$\int_{HE} P(x, y)\, dx = 0, \qquad \int_{FG} P(x, y)\, dx = 0,$$

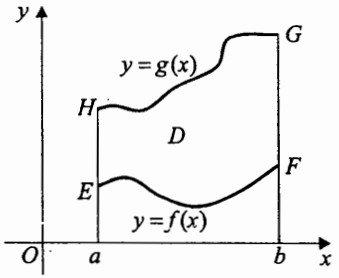
to je

$$\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{EF} P\, dx - \int_{FG} P\, dx - \int_{GH} P\, dx - \int_{HE} P\, dx = -\oint_{C+} P\, dx.$$

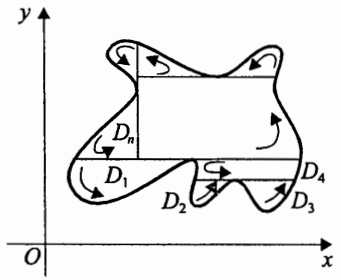
Slično se dobija

$$\oint_{C+} Q\, dy = \iint_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy,$$

pa sabiranjem sledi formula (2).



Sl. 6.3.7



Sl. 6.3.8

Ako oblast D nije elementarna, onda se ona najpre, pravim linijama paralelnim koordinatnim osama, podeli na elementarne oblasti D_i, $i = 1, \ldots, n$, sl. 8. Potom se na svaku od oblasti D_i primeni dobijena jednakost

$$\oint_{C_i^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_{\overline{D}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

gde je C_i granica oblasti D_i. Sabiranjem ovih jednakosti za $i = 1, \ldots, n$, dobija se

$$\oint_{C+} P\, dx + Q\, dy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

jer se krivolinijski integrali po onim granicama oblasti C_i koje se nalaze unutar oblasti D pojavljuju dva puta, ali u suprotnim smerovima, pa se poništavaju. ■

PRIMER 6.3.2

Pomoću krivolinijskog integrala izračunaćemo površinu ravne površi, ograničene deo-po-deo glatkom krivom.

Neka je D zatvorena oblast u ravni Oxy, ograničena deo-po-deo glatkom krivom C. Površina μD te oblasti data je dvojnim integralom $\mu D = \iint_{\overline{D}} dx\, dy$. S druge strane, u formuli (2) stavimo $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$. Tada je

$$\iint_{\overline{D}} dx\, dy = \oint_{C+} x\, dy.$$

Stavi li se $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$, dobija se

$$\iint_{\overline{D}} dx\, dy = -\oint_{C+} y\, dx.$$

Sabirajući poslednje dve jednakosti dobijamo

$$\mu D = \iint_{\overline{D}} dx\, dy = \frac{1}{2} \oint_{C+} x\, dy - y\, dx. \quad ▲$$

6.4. STILTJESOV INTEGRAL

Još jedno uopštenje Rimanovog integrala dato je Stiltjesovim* integralom.

Neka su na segmentu $[a, b] \subset \mathbf{R}$ definisane dve ograničene funkcije $f(x)$ i $\alpha(x)$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, a $\lambda(P)$ je parametar podele P. Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo po tačku ξ_i, $i = 1, \ldots, n$. Označimo $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$. Zbir oblika

$$\sigma(f, \alpha, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta\alpha_i$$

naziva se *Stiltjesovim zbirom* funkcije f po funkciji α.

* T. J. Stieltjes (1856–1894), holandski matematičar

Definicija 6.4.1

Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,\alpha,P,\xi),$$

on se naziva *Stiltjesovim integralom* funkcije $f(x)$ po funkciji $\alpha(x)$ i označava se simbolom

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \qquad \text{ili} \qquad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

ili, kraće,

$$\int_a^b f\,d\alpha. \tag{1}$$

Dakle, ako postoji broj I i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\lambda(P) < \delta$, i proizvoljan izbor istaknutih tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ važi

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\alpha_i - I\right| < \varepsilon,$$

onda je

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,\alpha,P,\xi) = I = (\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

Funkcije f i α se nazivaju *integrand*, odnosno *integrator*.

Ako postoji integral (1), onda se kaže da je funkcija f integrabilna po funkciji α na segmentu $[a,b]$ i piše $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$.

Primetimo da je Rimanov integral specijalan slučaj Stiltjesovog integrala za $\alpha(x) = x$.

Svojstva Stiltjesovog integrala

Od svojstava ćemo najpre pomenuti linearnost integrala s obzirom na integrand i integrator.

Teorema 6.4.1

Neka su c_1, c_2 proizvoljne konstante i f_1, f_2, α, β ograničene realne funkcije na $[a,b]$.

1° Ako f_1, $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$, onda je $c_1f_1 + c_2f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$ i pri tom važi

$$\int_a^b (c_1f_1 + c_2f_2)\,d\alpha = c_1\int_a^b f_1\,d\alpha + c_2\int_a^b f_2\,d\alpha.$$

2° Ako je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ i $f \in \mathcal{R}(\beta)$ na $[a,b]$, onda je $f \in \mathcal{R}(c_1\alpha + c_2\beta)$ na $[a,b]$ i pri tom važi

$$\int_a^b f\,d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1\int_a^b f\,d\alpha + c_2\int_a^b f\,d\beta.$$

Dokaz.

1° Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$, suma $\sigma(c_1f_1 + c_2f_2, \alpha, P, \xi)$ može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}\sigma(c_1f_1 + c_2f_2, \alpha, P, \xi) &= \sum_{i=1}^n [c_1f_1(\xi_i) + c_2f_2(\xi_i)]\Delta\alpha_i \\ &= c_1\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta\alpha_i + c_2\sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta\alpha_i.\end{aligned}$$

Prelaskom na limes za $\lambda(P) \to 0$ dobija se tvrđenje.

2° Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$, suma $\sigma(f, c_1\alpha + c_2\beta, P, \xi)$ može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}\sigma(f, c_1\alpha + c_2\beta, P, \xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta(c_1\alpha + c_2\beta)_i \\ &= c_1\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\alpha_i + c_2\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\beta_i,\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje za $\lambda(P) \to 0$. ■

Teorema 6.4.2

Ako je $a < c < b$ i sva tri integrala u jednakosti (2) postoje, onda važi

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha. \tag{2}$$

Dokaz.

Dobija se neposredno, ako se u svakoj posmatranoj podeli P segmenta $[a,b]$ tačka c uzima kao deona tačka u integralnim sumama za integral $\int_a^b f\,d\alpha$. ■

Lako se pokazuje da iz egzistencije integrala $\int_a^b f\,d\alpha$ sledi egzistencija integrala na desnoj strani jednakosti (2). Da obratno tvrđenje ne važi pokazaćemo na primeru.

Primer 6.4.1

Funkcije f i α definisane su jednakostima

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & \text{za } 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Stiltjesove integralne sume $\sigma(f,\alpha,P_1,\xi)$ i $\sigma(f,\alpha,P_2,\eta)$, gde su P_1 i P_2 podele segmenata $[-1,0]$, odnosno $[0,1]$, imaju oblik

$$\sigma(f,\alpha,P_1,\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta\alpha_i = 0 \qquad (f(\xi_i) = 0),$$

$$\sigma(f,\alpha,P_2,\eta) = \sum_{j=1}^n f(\eta_j)\Delta\alpha_j = 0 \qquad (\Delta\alpha_j = 0).$$

Dakle je $\int_{-1}^0 f\,d\alpha = 0$, $\int_0^1 f\,d\alpha = 0$.

S druge strane, ako na segmentu $[-1,1]$ posmatramo takvu podelu P kod koje tačka 0 nije deona tačka segmenta, onda postoji k, tako da je $0 \in (x_{k-1}, x_k)$, pa suma $\sigma(f,\alpha,P,\xi)$ ima vrednost

$$\sigma(f,\alpha,P,\xi) = \sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta\alpha_i + f(\xi_k)\Delta\alpha_k = f(\xi_k) = \begin{cases} 1, & \text{za } \xi_k > 0, \\ 0, & \text{za } \xi_k \leqslant 0, \end{cases}$$

jer je $\sum\limits_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta\alpha_i = 0$. Dakle, $\int_{-1}^{1} f\,d\alpha$ ne postoji. ▲

Definišimo još

$$\int_a^a f\,d\alpha = 0, \qquad \int_b^a f\,d\alpha = -\int_a^b f\,d\alpha \quad (a<b).$$

Jednakost (2) možemo napisati u obliku

$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha + \int_b^a f\,d\alpha = 0.$$

Teorema 6.4.3

Neka su f, α ograničene realne funkcije na segmentu $[a,b]$. Iz egzistencije jednog od integrala $\int_a^b f\,d\alpha$ i $\int_a^b \alpha\,df$ sledi egzistencija drugog. Štaviše, važi jednakost

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)\,df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Dokaz.

Pretpostavimo da postoji $\int_a^b f\,d\alpha$. Tada za podelu P segmenta $[a,b]$ imamo

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha,f,P,\xi) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n}\alpha(\xi_i)f(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\alpha(\xi_i)f(x_{i-1}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[\alpha(\xi_{i+1})-\alpha(\xi_i)] + \alpha(\xi_n)f(x_n) - \alpha(\xi_1)f(x_0).\end{aligned}$$

Dodajmo i oduzmimo od poslednjeg izraza

$$f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = [f(x)\alpha(x)]_a^b.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha,f,P,\xi) = [f(x)\alpha(x)]_a^b - \Bigg(&\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[\alpha(\xi_{i+1})-\alpha(\xi_i)] \\ &+ f(b)[\alpha(b)-\alpha(\xi_n)] + f(a)[\alpha(\xi_1)-\alpha(a)]\Bigg).\end{aligned}$$

Za podelu $P' = \{a,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,b\}$ i istaknute tačke $x = (a,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},b)$, drugi sabirak desne strane poslednje jednakosti predstavlja integralnu Stiltjesovu sumu $\sigma(f,\alpha,P',x)$. Lako se vidi da kada $\lambda(P)\to 0$, onda i $\lambda(P')\to 0$, te dobijamo

$$\int_a^b \alpha(x)\,df(x) = [f(x)\alpha(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \quad ■$$

Funkcije ograničene varijacije

Pre dokaza jedne teoreme o egzistenciji Stiltjesovog integrala zadržaćemo se na jednoj posebnoj klasi funkcija realne promenljive — funkcijama ograničene varijacije.

Neka je realna funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$. Ako je $\mathcal{P}$ familija svih podela $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$, onda se supremum

$$V_f(a,b) = \sup_{P\in\mathcal{P}} V(P) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

naziva *totalnom varijacijom* funkcije f na $[a,b]$. Funkcija f je *ograničene varijacije* na $[a,b]$ ako je $V_f(a,b) < \infty$.

Primer 6.4.2

Neka funkcija $f(x)$, $x\in[a,b]$, zadovoljava Lipšicov uslov. Tada postoji konstanta L tako da za proizvoljnu podelu $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$ važi

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant L(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1,\ldots,n,$$

odakle sledi

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant L(b-a),$$

tj. f je funkcija ograničene varijacije.

Specijalno, ako funkcija $f(x)$ na $[a,b]$ ima ograničen izvod $f'(x)$, onda je f ograničene varijacije. ▲

Stav 6.4.1

Monotona funkcija na segmentu je funkcija ograničene varijacije.

Dokaz.

Neka je f rastuća funkcija na $[a,b]$. Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$ važi

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

Sličan je dokaz i u slučaju opadajuće funkcije. ■

Primetimo da ne mora svaka neprekidna funkcija na nekom segmentu biti ograničene varijacije.

Primer 6.4.3

Posmatrajmo neprekidnu funkciju

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{za } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{za } x=0.\end{cases}$$

Za proizvoljno $n\in\mathbf{N}$ uočimo podelu $P=\left\{0,\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n-1},\ldots,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},1\right\}$. Tada je $V(P)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, odakle sledi $V_f(0,1)=\infty$. ▲

Stav 6.4.2

Zbir i razlika dveju funkcija ograničene varijacije su funkcije ograničene varijacije.

Dokaz.

Neka su f i g ograničene varijacije na $[a,b]$ i neka je $s(x)=f(x)+g(x)$, $r(x)=f(x)-g(x)$. Za proizvoljnu podelu $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ je

$$|s(x_i)-s(x_{i-1})|\leqslant|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|,$$
$$|r(x_i)-r(x_{i-1})|\leqslant|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|,$$

odakle sledi $V_s(a,b)\leqslant V_f(a,b)+V_g(a,b)$, $V_r(a,b)\leqslant V_f(a,b)+V_g(a,b)$. ■

Stav 6.4.3

Neka je funkcija f ograničene varijacije na $[a,b]$ i $a<c<b$. Tada je f ograničene varijacije na $[a,c]$ i $[c,b]$ i važi

$$V_f(a,b)=V_f(a,c)+V_f(c,b).$$

Dokaz.

Neka su P' i P'' proizvoljne podele segmenta $[a,c]$, odnosno $[c,b]$. Tada je $P=P'\cup P''$ podela segmenta $[a,b]$, pa za odgovarajuće sume važi $V(P')+V(P'')=V(P)$. Odavde sledi $V(P')+V(P'')\leqslant V_f(a,b)$, kao i

$$V_f(a,c)+V_f(c,b)\leqslant V_f(a,b). \tag{3}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ proizvoljna podela segmenta $[a,b]$, u kojoj c ne mora biti deona tačka. Ako je $c=x_m$, $0<m<n$, $P'=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$, $P''=\{x_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}$, onda je $V(P)=V(P')+V(P'')$, odakle je

$$V(P)\leqslant V_f(a,c)+V_f(c,b).$$

Ako je $c\in(x_{m-1},x_m)$, onda tačku c dodajmo podeli P, čime se dobija podela $P_1=P\cup\{c\}$. Dodavanjem novih tačaka suma V se ne umanjuje, pa je

$$V(P)\leqslant V(P_1)\leqslant V_f(a,c)+V_f(c,b),$$

odnosno

$$V_f(a,b)\leqslant V_f(a,c)+V_f(c,b). \tag{4}$$

Iz (3) i (4) se dobija tvrđenje stava. ■

Teorema 6.4.4

Funkcija $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ je ograničene varijacije ako i samo ako se može izraziti kao razlika dveju rastućih funkcija.

Dokaz.

$\Longrightarrow$. Definišimo funkciju $D\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ formulom

$$D(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x=a,\\ V_f(a,x), & \text{za } a<x\leqslant b.\end{cases}$$

Iz stava 3 sledi da je D rastuća funkcija. Takođe je i funkcija $v(x)=D(x)-f(x)$ rastuća. Naime, ako je $a\leqslant x<y\leqslant b$, onda je

$$\begin{aligned}v(y)-v(x)&=D(y)-f(y)-[D(x)-f(x)]\\&=D(y)-D(x)-[f(y)-f(x)]\\&=V_f(x,y)-[f(y)-f(x)]\geqslant 0,\end{aligned}$$

jer je $|f(y)-f(x)|\leqslant V_f(x,y)$. Dakle, funkcija $f(x)=D(x)-v(x)$ je razlika rastućih funkcija.

$\Longleftarrow$. Sledi iz stavova 1 i 2. ■

Iz stava 5.5.1 iz M.A.I sledi da važi

Posledica 6.4.1

Funkcija ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$ u svakoj tački tog segmenta ima konačne jednostrane limese. Svi prekidi te funkcije su prve vrste i ima ih najviše prebrojivo mnogo. ■

Egzistencija i izračunavanje Stiltjesovog integrala

Slično Darbuovim sumama definišu se Darbu-Stiltjesove sume.

Posmatrajmo realne funkcije f i α, definisane i ograničene na segmentu $[a,b]$. Neka je pri tom α rastuća funkcija. Za proizvoljnu podelu $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$ sa m_i i M_i označimo infimum, odnosno supremum, funkcije $f(x)$ na $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$. Sume

$$s=s(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\alpha_i,\quad S=S(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\alpha_i$$

nazivaju se *donjom*, odnosno *gornjom Darbu-Stiltjesovom sumom.*

Nabrojmo neka svojstva Darbu-Stiltjesovih suma, koja se dokazuju slično svojstvima Darbuovih suma:

1° $s(f,\alpha,P)\leqslant\sigma(f,\alpha,P,\xi)\leqslant S(f,\alpha,P)$.

2° Dodavanjem nove deone tačke podeli, suma s se ne smanjuje, a suma S se ne povećava.

3° Nijedna donja suma nije veća ni od jedne gornje sume.

Teorema 6.4.5

Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, a α je ograničene varijacije na $[a,b]$. Tada je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$.

Dokaz.

Pretpostavimo najpre da je α rastuća funkcija.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno malo. Tada postoji $\delta > 0$ tako da važi

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela segmenta $[a,b]$, sa $\lambda(P) < \delta$. Tada je

$$S(f,\alpha,P) - s(f,\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}(\alpha(b)-\alpha(a)) = \varepsilon.$$

Označimo $I = \sup_P s(f,\alpha,P)$. Kako je $s(f,\alpha,P) \leqslant \sigma(f,\alpha,P,\xi) \leqslant S(f,\alpha,P)$ i $s(f,\alpha,P) \leqslant I \leqslant S(f,\alpha,P)$, to je i $|\sigma - I| < \varepsilon$. Drugim rečima, postoji

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,\alpha,P,\xi) = I,$$

tj. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$.

Za proizvoljnu funkciju ograničene varijacije tvrđenje teoreme sledi iz dokazanog specijalnog slučaja i teorema 1 i 4. ■

Iz teoreme 3 neposredno zaključujemo da važi i

Posledica 6.4.2

Ako je funkcija f ograničene varijacije na $[a,b]$, a funkcija α je neprekidna na tom segmentu, tada $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. ■

Teorema 6.4.6

Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, a α je diferencijabilna i α' je integrabilna u Rimanovom smislu na $[a,b]$, onda je

$$(5) \qquad (S)\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

Dokaz.

Kako je funkcija α' integrabilna, ona je ograničena. Dakle, α zadovoljava Lipšicov uslov, pa je ograničene varijacije. Prema tome, integral na levoj strani jednakosti (5) postoji.

S druge strane, kako je f neprekidna, a α' integrabilna funkcija, to postoji i integral na desnoj strani te jednakosti.

Dokažimo jednakost (5). Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela segmenta $[a,b]$. Integralni Stiltjesov zbir $\sigma(f,\alpha,P,\xi)$ ima oblik

$$\sigma(f,\alpha,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})).$$

Prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti je $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(\eta_i) \times (x_i - x_{i-1})$, $x_{i-1} < \eta_i < x_i$, pa možemo pisati

$$\sigma(f,\alpha,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\alpha'(\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(\eta_i)]\alpha'(\eta_i)\Delta x_i,$$

gde je $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Kada $\lambda(P) \to 0$, prvi sabirak s desne strane teži ka $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx$, a drugi ka nuli. Naime, α' je integrabilna, dakle i ograničena funkcija, pa postoji K, tako da je $|\alpha'(x)| \leqslant K$, $x \in [a,b]$. Za neprekidnu funkciju f i $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je za $\lambda(P) < \delta$ ispunjeno $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{K(b-a)}$, $i = 1, \ldots, n$, pa je

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(\eta_i)]\alpha'(\eta_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon. \quad ■$$

Teorema 6.4.7

Ako je funkcija $f \in C[a,b]$, a funkcija α je deo-po-deo konstantna na $[a,b]$, tj. postoji konačno mnogo tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ iz $[a,b]$, tako da je α konstantna na svakom od intervala $(a,x_1), (x_1,x_2), \ldots, (x_{n-1},b)$, tada je

(6)

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(a)[\alpha(a+0)-\alpha(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[\alpha(x_i+0)-\alpha(x_i-0)] + f(b)[\alpha(b)-\alpha(b-0)].$$

Dokaz.

Primetimo najpre da je funkcija α ograničene varijacije na $[a,b]$, pa prema teoremi 5 integral $\int_a^b f\,d\alpha$ postoji. Da bismo ga izračunali, napišimo ga u obliku

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,d\alpha$$

i odredimo svaki od integrala u poslednjem zbiru posebno.

Neka je $P^i = \{x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{k_i}^i\}$ proizvoljna podela segmenta $[x_{i-1}, x_i]$, gde je $x_0^i = x_{i-1}$, $x_{k_i}^i = x_i$ i neka je ξ^i neki skup odgovarajućih istaknutih tačaka, $i = 1, \ldots, n$. Tada integralna suma $\sigma^i(f,\alpha,P^i,\xi^i)$ integrala $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,d\alpha$ ima vrednost

$$\sigma^i(f,\alpha,P^i,\xi^i) = f(\xi_1^i)[\alpha(x_1^i) - \alpha(x_0^i)] + f(\xi_{k_i}^i)[\alpha(x_{k_i}^i) - \alpha(x_{k_i-1}^i)].$$

Naime, ostali sabirci te sume su jednaki nuli, jer je funkcija α konstantna u intervalu (x_{i-1}, x_i). Prelaskom na limes za $\lambda(P^i) \to 0$ dobijamo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,d\alpha = f(x_{i-1})[\alpha(x_{i-1}+0) - \alpha(x_{i-1})] + f(x_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_i - 0)].$$

Sabiranjem dobijenih relacija za $i = 1, \ldots, n$ izvodimo formulu (6). ■

Primeri 6.4.4

1° Izračunajmo vrednost Stiltjesovog integrala $(S)\int_0^{\pi/2} x\,d\sin x$.

Prema formuli (5) je

$$(S)\int_0^{\pi/2} x\,d\sin x = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2° Neka je $f \in C[0,a]$, $a > 0$. Primenom teoreme 7 na Stiltjesov integral $\int_0^a f(x)\,d\lfloor x\rfloor$, gde je $\lfloor\cdot\rfloor$ funkcija „ceo deo", dobija se

$$\int_0^a f(x)\,d\lfloor x\rfloor = \sum_{i=1}^{\lfloor a\rfloor} f(i).$$

Slično, za $f \in C[a,1]$, $0 < a < 1$, imamo

$$\int_a^1 f(x)\,d\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = -\sum_{i=2}^{\lfloor 1/a\rfloor} f\left(\frac{1}{i}\right).$$

3° Posmatrajmo krivolinijski integral

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx, \tag{7}$$

gde je $P(x,y)$ neprekidna funkcija, a kriva AB je data jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Pri tom je pretpostavljeno da su funkcije φ i ψ neprekidne i ograničene varijacije na $[\alpha,\beta]$. U cilju izračunavanja integrala (7) uočimo proizvoljnu podelu $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ segmenta $[\alpha,\beta]$ sa istaknutim tačkama $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, i formirajmo integralni zbir

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P\big(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)\big)[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})].$$

Limes ovog zbira za $\lambda(T) \to 0$ je Stiltjesov integral

$$(S)\int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\varphi(t)$$

(koji pod datim pretpostavkama postoji na osnovu teoreme 5), pa možemo pisati

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = (S)\int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\varphi(t).$$

Uz odgovarajuće uslove, slično se dobija jednakost

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = (S)\int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\varphi(t) + (S)\int_\alpha^\beta Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\psi(t). \quad \blacktriangle$$

6.5. POVRŠINSKI INTEGRAL PRVE VRSTE

Neka je data glatka površ $S \subset \mathbf{R}^3$ jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = \varphi(u,v)\vec{i} + \psi(u,v)\vec{j} + \chi(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \Delta, \tag{1}$$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, gde je Δ merljiva zatvorena oblast, funkcije φ, ψ, χ su neprekidno diferencijabilne na Δ, a S je ograničena deo-po-deo glatkom krivom. Pretpostavimo da je na S zadata neprekidna realna funkcija $f(x,y,z)$.

Uočimo proizvoljnu podelu $T = \{\Delta_i \mid i = 1, \dots, p\}$ oblasti Δ. Podela T indukuje podelu $T' = \{S_i \mid i = 1, \dots, p\}$ na površi S. U svakom delu S_i podele T' izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$, pri čemu je $x_i = \varphi(u_i, v_i)$, $y_i = \psi(u_i, v_i)$, $z_i = \chi(u_i, v_i)$ za neko $(u_i, v_i) \in \Delta_i$, $i = 1, \dots, p$.

Posmatrajmo zbir

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i. \tag{2}$$

Konačni limes integralnog zbira (2) kad $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \delta S_i \to 0$ (sa δS_i označen je dijametar skupa S_i) naziva se *površinskim integralom prve vrste* funkcije $f(x,y,z)$ po površi S i označava se sa

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS.$$

Stav 6.5.1

Neka je $S \subset \mathbf{R}^3$ glatka površ, f, $g\colon S \to \mathbf{R}$ i integrali $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ i $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ postoje. Tada važi

1° $\iint_S (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,dS = \alpha \iint_S f(x,y,z)\,dS + \beta \iint_S g(x,y,z)\,dS$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$.

2° $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)\,dS$ *ako je* $S = S_1 \cup S_2$ *i površi* S_1 *i* S_2 *nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.*

3° *Ako je* $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$, *onda je* $\iint_S f(x,y,z)\,dS \leqslant \iint_S g(x,y,z)\,dS$.

4° *Ako je* $f(x,y,z)$ *neprekidna funkcija na* S, *onda postoji tačka* $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta) \in S$, *takva da je* $\iint_S f(x,y,z)\,dS = f(\xi,\eta,\zeta)\mu S$, *gde je* μS *površina površi* S. ■

Izračunavanje površinskog integrala prve vrste svodi se na izračunavanje dvojnog integrala.

Teorema 6.5.1

Neka je data površ S jednačinom (1) i na njoj definisana neprekidna funkcija $f(x,y,z)$. Tada važi jednakost

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

gde su E, F i G Gausovi koeficijenti površi S.

Dokaz.

Kako površi S u prostoru $Oxyz$ odgovara oblast Δ u ravni $O'uv$, to svakoj podeli $T = \{\Delta_1, \dots, \Delta_p\}$ oblasti Δ odgovara podela $T' = \{S_1, \dots, S_p\}$ površi S i obratno. U svakom delu S_i izaberimo proizvoljnu tačku (x_i, y_i, z_i) i nađimo $(u_i, v_i) \in \Delta$ za koje važi

$$x_i = \varphi(u_i, v_i), \quad y_i = \psi(u_i, v_i), \quad z_i = \chi(u_i, v_i), \qquad i = 1, \dots, p.$$

Pokazaćemo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\eta > 0$, tako da za proizvoljnu podelu T' za koju je $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$, važi nejednakost

$$(3) \quad \left| \sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i - \iint_{\Delta} f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \right| < \varepsilon,$$

bez obzira na izbor tačaka $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$. Pri tom je: $E = \varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \chi_u'^2$, $F = \varphi_u'\varphi_v' + \psi_u'\psi_v' + \chi_u'\chi_v'$, $G = \varphi_v'^2 + \psi_v'^2 + \chi_v'^2$ (v. odeljak 4.8).

Po formuli (3) odeljka 5.6 je

$$\mu S_i = \iint_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

a korišćenjem stava o srednjoj vrednosti imamo

$$\mu S_i = \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)}\, \mu\Delta_i, \quad (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \in \Delta_i,$$

pa se leva strana nejednakosti (3) može napisati u obliku

$$(4) \quad \Bigg| \sum_{i=1}^{p} f\big(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)\big) \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$- \sum_{i=1}^{p} f\big(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)\big) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} f\big(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)\big) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$- \iint_{\Delta} f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \Bigg|.$$

Funkcija $f(x, y, z)$ je ograničena, pa postoji $A \in \mathbf{R}$, tako da je $|f(x, y, z)| \leqslant A$, $(x, y, z) \in S$. Dalje, kako su funkcije $f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big)$, $E(u,v)$, $F(u,v)$ i $G(u,v)$ neprekidne, to postoje η_1 i η_2, tako da za $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta_1$ važi

$$\left| \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)} - \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{2A \cdot \mu\Delta},$$

a za $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta_2$ važi

$$\Bigg| \sum_{i=1}^{p} f\big(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)\big) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$- \iint_{\Delta} f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \Bigg| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\min\{\eta_1, \eta_2\} = \eta^*$. Izaberimo $\eta > 0$ tako da iz $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$ sledi $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta^*$. Uzevši u obzir izraz (4), vidi se da važi nejednakost (3) za $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$. ■

Ako je površ S data u obliku $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, onda je $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, pa je

$$(5) \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

gde je D projekcija površi S na Oxy ravan.

Može se pokazati da teorema 1 važi i kada je S deo-po-deo glatka površ, tj. kada se sastoji od konačnog broja glatkih površi koje se seku najviše po granicama.

Primeri 6.5.1

1° Izračunajmo površinski integral

$$I = \iint_S (x + y + z)\, dS,$$

gde je S polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

Stavimo $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = R/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Tada je

$$I = R \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx\, dy,$$

gde je $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R\}$. Prelaskom na polarne koordinate imamo

$$I = R \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr + R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = \pi R^3.$$

2° Kod tankih ploča veće površine uvodi se pojam površinske gustine. Ako je ploča homogena, onda se površinska gustina ρ definiše kao $\rho = m/S$, gde je m masa, a S površina ploče. Kod nehomogenih ploča definiše se gustina u proizvoljnoj tački M ploče kao $\rho = \lim\limits_{\delta U \to 0} \dfrac{m(U)}{\mu U}$, gde je U okolina tačke M, $m(U)$ je masa dela ploče u toj okolini, a μU površina tog dela.

Neka je poznata površinska gustina $\rho(x, y, z)$ mase m raspoređene neprekidno po površi S u koordinatnom sistemu $Oxyz$. Odredimo masu m. U tom cilju uočimo jednu podelu $T = \{S_i \mid i = 1, \dots, p\}$ površi S i u svakom delu S_i izaberimo tačku $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, p$. Pretpostavimo da su S_i dovoljno mali po dijametru.

Tada su površinske gustine u svim tačkama dela S_i približno jednake površinskoj gustini $\rho(x_i, y_i, z_i)$. Masa u delu površi S_i iznosi približno $\rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$, a masa m raspoređena po površi S približno iznosi

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i.$$

Prelaskom na limes kad $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i \to 0$ dobija se masa m raspoređena po površi S u obliku

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS. \quad \blacktriangle$$

6.6. POVRŠINSKI INTEGRAL DRUGE VRSTE

Orijentacija površi

Neka je glatka površ S zatvorena ili ograničena deo-po-deo glatkom krivom k. Određenosti radi pretpostavimo da je S data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. U svakoj tački površi definisana su dva jedinična vektora normale. Ako jedan označimo sa $\vec{n}$, drugi će biti $-\vec{n}$.

Neka je M_0 proizvoljna tačka površi S. Sa l označimo proizvoljnu zatvorenu krivu na S, koja sadrži M_0 i ne seče k. Uočimo tačku M koja se kreće po krivoj l, polazeći iz M_0, i vraća se u M_0, prošavši svim tačkama krive l. Pri tom posmatrajmo promenljivi vektor $\vec{n}(M)$, takav da je u početku kretanja $\vec{n}(M_0) = \vec{n}_0$ (jedan od dva moguća vektora u tački M_0), i čija je promena neprekidna pri kretanju tačke M.

Mogu nastupiti dva slučaja — jedinični vektor normale $\vec{n}(M)$ na kraju kretanja, u tački M_0 je $\vec{n}_0$ (promenljivi vektor normale dolazi u početni položaj) ili $-\vec{n}_0$ (promenljivi vektor normale dolazi u suprotan položaj).

Ako se za svaku tačku M_0 površi S i svaku zatvorenu krivu na površi, koja sadrži tačku M_0, promenljivi vektor normale vraća u početni položaj, površ S ćemo nazivati *dvostranom površi.* Svaki od dva suprotna vektora normale u proizvoljnoj tački M površi određuje po jednu njenu stranu. Pomoću ovih vektora normala možemo orijentisati površ S. Ako stranu površi koju određuje vektor $\vec{n}$ nazovemo pozitivnom (pozitivna strana površi S vidi se sa kraja vektora $\vec{n}$ ako mu je početak u tački M), onda ćemo drugu stranu površi nazivati negativnom.

Primera radi, dvostrane i, prema tome, orijentabilne površi su sfera, eliptički i hiperbolički paraboloid i dr.

Ako postoji bar jedna tačka $N_0 \in S$ i bar jedna zatvorena kriva N_0ABN_0 na površi S, tako da proizvoljni vektor normale dolazi u suprotni položaj u tački N_0, onda za svaku tačku $N \in S$ postoji kriva l' po kojoj promenljivi vektor normale dolazi u suprotan položaj (pri tom se podnožje promenljivog vektora kreće po krivoj l'). Zaista, ako krivu NN_0ABN_0N uzmemo za krivu l', onda promenljivi vektor normale, polazeći od tačke N, dolazi u suprotan položaj.

Ovakve površi ćemo nazivati *jednostranim površima.* One su neorijentabilne. Kao primer jednostrane, neorijentabilne površi navedimo Mebiusovu traku (v. primer 4.6.2).

Površinski integral druge vrste

Neka je glatka orijentisana površ $S \subset \mathbf{R}^3$ data jednačinom

$$\vec{r}(u, v) = \varphi(u, v)\vec{\imath} + \psi(u, v)\vec{\jmath} + \chi(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in \Delta, \tag{1}$$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, gde je Δ merljiva zatvorena oblast u ravni $O'uv$, funkcije φ, ψ, χ su neprekidno diferencijabilne na Δ, a S je ograničena deo-po-deo glatkom krivom. Izaberimo jednu stranu površi i sa $\vec{n}(x, y, z)$ označimo vektorsko polje jediničnih normala na S. Pretpostavimo da je na površi definisana neprekidna realna funkcija $f(x, y, z)$.

Uočimo proizvoljnu podelu $T = \{\Delta_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ oblasti Δ i njome indukovanu podelu $T' = \{S_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ površi S. U svakom delu S_i podele T' izaberimo tačku (x_i, y_i, z_i). Uglove koje normala $\vec{n}(x_i, y_i, z_i)$ zaklapa sa osama Ox, Oy, Oz označimo sa α_i, β_i, γ_i, respektivno.

Posmatrajmo sume

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\alpha_i \cdot \mu S_i, \tag{2a}$$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\beta_i \cdot \mu S_i, \tag{2b}$$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\gamma_i \cdot \mu S_i. \tag{2c}$$

Konačni limesi integralnih suma (2a), (2b), (2c) kad $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i \to 0$ nazivaju se *površinskim integralima druge vrste* funkcije $f(x, y, z)$ po površi S i označavaju se, respektivno, sa

$$\iint_S f(x, y, z) \cos\alpha\, dS, \tag{3a}$$

$$\iint_S f(x, y, z) \cos\beta\, dS, \tag{3b}$$

$$\iint_S f(x, y, z) \cos\gamma\, dS. \tag{3c}$$

Promenom pravca normale ili, što je isto, promenom strane površi S po kojoj se vrši integracija, menja se znak integralne sume (2a), (2b), odnosno (2c), a time i odgovarajućeg integrala (3a), (3b), odnosno (3c). Kada se prilikom integracije izvrši izbor površi S, onda se integrali (3a,b,c) mogu smatrati kao površinski integrali prve vrste funkcija $f(x, y, z)\cos\alpha$, $f(x, y, z)\cos\beta$, $f(x, y, z)\cos\gamma$, respektivno. Dakle, površinski integral druge vrste izračunava se pomoću dvojnog integrala.

Teorema 6.1.1

Za datu površ (1) i neprekidnu funkciju $f(x,y,z)$, definisanu na toj površi, važe jednakosti

(4a)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\,dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,\cos\alpha\,du\,dv,$$

(4b)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\beta\,dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,\cos\beta\,du\,dv,$$

(4c)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \int \qquad (u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\cos\gamma\,du\,dv. \quad \blacksquare$$

Integral po površi $z = z(x,y)$

Neka je površ S data jednačinom $z = z(x,y)$, (Za parametre u i v uzećemo x i y, tj. stavićemo $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y$ $z(x,y)$. Pretpostavimo da vršimo integraciju po onoj strani površi povučena u proizvoljnoj tački površi, zaklapa oštar ugao sa na površi S definisana neprekidna funkcija $f(x,y,z)$. Kako $\sqrt{\quad - F^2}$ $\sqrt{p^2+q^2}$, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, to formula (4c) ima oblik

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint_D f(x,y,z(x \quad \sqrt{p^2+q^2}\, dx\,dy.$$

gde je D projekcija površi S na ravan Oxy. G jnakos

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint_D f(x \qquad y))\,dx$$ (5)

što nam ukazuje na sledeć druge vrs

$$\iint_S f(\qquad \iint_S f(x,y,z)$$

Ako se projektovanje površi S vrši na ravan Oyz, odnosno Ozx, dobijaju se površinski integrali druge vrste

$$\iint_S f(x,y,z)\,dy\,dz, \quad \text{odnosno} \quad \iint_S f(x,y,z)\,dz\,dx.$$

Obično se posmatraju površinski integrali oblika

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS, \tag{6}$$

koji se označavaju još i kao

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{7}$$

gde su P, Q, R funkcije definisane na površi S.

Primeri 6.1.1

1° Izračunajmo integral

$$I = \iint_S x^2y^2z\,dx\,dy,$$

gde je S donja strana polusfere $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

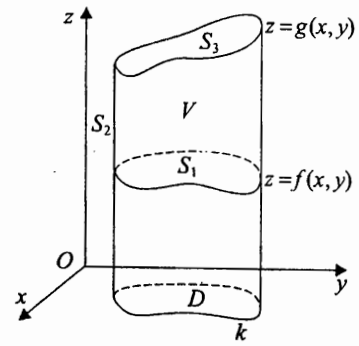
Projekcija površi S na ravan Oxy je krug $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$. Jednačina polusfere je $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, a $\cos\gamma$ je negativan. Prema tome je

$$I = -\iint_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Prelaskom na polarne koordinate imamo

$$I = -\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,dr = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8R^7}{105} = -\frac{2\pi R^7}{105}.$$

2° Geometrijska figura V ograničena je površima $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, $(x,y) \in D$, i cilindričnom površi čija je vodilja kriva k u ravni Oxy koja ograničava oblast D, a izvodnice su paralelne z-osi, sl. 1. Deo površi $z = f(x,y)$ koji ograničava figuru V označimo sa S_1, deo cilindrične površi koji ograničava V sa S_2, a deo površi $z = g(x,y)$ koji ograničava V sa S_3. Izrazimo zapreminu μV figure V pomoću površinskog integrala.



Sl. 6.6.1

Zapremina μV data je razlikom dvojnih integrala

$$\mu V = \iint_D g(x,y)\,dx\,dy - \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

što se može napisati u obliku

$$\mu V = \iint_{S_3} g(x,y)\,dx\,dy + \iint_{S_1} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{8}$$

gde se integracija vrši po gornjoj strani površi S_3 i po donjoj strani površi S_1. Kako projekcija površi S_2 na ravan Oxy ima meru nula, to je

$$\iint_{S_2} z\,dx\,dy = 0. \tag{9}$$

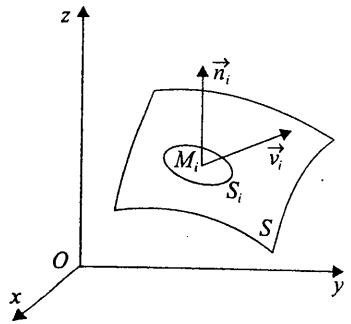
Ako desnoj strani jednakosti (8) dodamo levu stranu jednakosti (9) i označimo $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$, onda za μV dobijamo

$$\mu V = \iint_S z\,dx\,dy.$$

3° Posmatrajmo polje brzine

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

tečnosti. Pretpostavimo da je gustina tečnosti jednaka jedinici i da je kretanje tečnosti stacionarno (tj. brzina delića koji prolaze kroz jednu tačku ne zavisi od vremena, nego samo od tačke). Neka je S površ kroz koju prolazi posmatrana tečnost. Nađimo količinu tečnosti koja prolazi kroz površ S.



Sl. 6.6.2

U tom cilju uočimo podelu $T = \{ S_i \mid i = 1, \ldots, p \}$ površi S. U svakom S_i izaberimo tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Jedinična normala $\vec{n}_i$ u tački M_i neka zaklapa uglove α_i, β_i, γ_i sa osama Ox, Oy, Oz, respektivno. Približna količina tečnosti koja kroz površ S prolazi u smeru normale (ili, da kažemo drugačije, kroz površ S, sa njene negativne na pozitivnu stranu), u jedinici vremena, iznosi

$$\sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \, \mu S_i = \sum_{i=1}^{p} [P(x_i,y_i,z_i)\cos\alpha_i + Q(x_i,y_i,z_i)\cos\beta_i + R(x_i,y_i,z_i)\cos\gamma_i] \cdot \mu S_i.$$

Prelaskom na limes zaključujemo da je ukupna količina tečnosti koja u jedinici vremena prolazi kroz površ S, sa njene negativne na njenu pozitivnu stranu, data površinskim integralom

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{10}$$

Površinski integral $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$ nazivamo *protokom (fluksom)* vektora $\vec{v}$ kroz orijentisanu površ S. ▲

6.7. GRADIJENT, DIVERGENCIJA, ROTOR

Za dato skalarno polje $u = u(x,y,z)$ definisali smo vektorsko polje njegovog gradijenta

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(v. odeljak 2.1).

Divergencija

Slično prethodnom, za dato vektorsko polje $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k} = (v_1, v_2, v_3)$ definisaćemo jedno skalarno polje koje ćemo nazivati divergencijom datog polja $\vec{v}$.

Neka je vektorsko polje $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ diferencijabilno. Tada je *divergencija* $\operatorname{div}\vec{v}$ skalarna funkcija

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Navedimo neka svojstva divergencije.

TEOREMA 6.7.1

Ako je $u(x,y,z)$ skalarno polje, $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ i $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{\imath} + w_2(x,y,z)\vec{\jmath} + w_3(x,y,z)\vec{k}$ su vektorska polja, definisana i diferencijabilna u oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$, a C_1, C_2 su proizvoljne konstante, onda je:

1° $\operatorname{div}(C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1 \operatorname{div}\vec{v} + C_2 \operatorname{div}\vec{w}$;

2° $\operatorname{div} u\vec{v} = u \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} u$.

Dokaz.

1° Sledi iz jednakosti

$$\frac{\partial(C_1v_1 + C_2w_1)}{\partial x} + \frac{\partial(C_1v_2 + C_2w_2)}{\partial y} + \frac{\partial(C_1v_3 + C_2w_3)}{\partial z}$$
$$= C_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial w_1}{\partial x} + C_1\frac{\partial v_2}{\partial y} + C_2\frac{\partial w_2}{\partial y} + C_1\frac{\partial v_3}{\partial z} + C_2\frac{\partial w_3}{\partial z}.$$

2° Leva strana jednakosti koja se dokazuje, $\frac{\partial(uv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(uv_2)}{\partial y} + \frac{\partial(uv_3)}{\partial z}$, može se napisati u obliku

$$u\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}v_1 + \frac{\partial u}{\partial y}v_2 + \frac{\partial u}{\partial z}v_3,$$

što nije ništa drugo nego desna strana te jednakosti. ■

PRIMERI 6.7.1

1° Za vektorsko polje $\vec{v} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ i dato skalarno polje $u = u(x,y,z)$ izračunajmo $\operatorname{div} u\vec{r}$.

Prema teoremi 1 imamo

$$\operatorname{div} u\vec{r} = u \operatorname{div}\vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} u.$$

Kako je $\operatorname{div}\vec{r} = 3$ i $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, to je

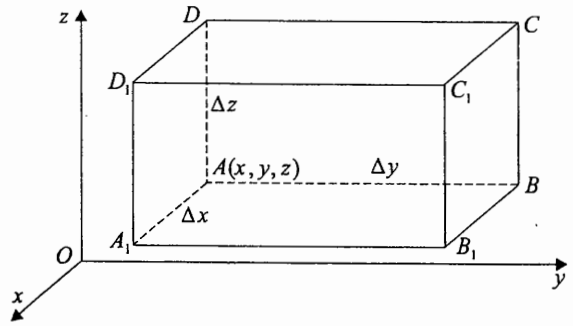
$$\operatorname{div} u\vec{r} = 3u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

2° Navešćemo jednu interpretaciju divergencije u teoriji fluida. Fluide, kako se zajedničkim imenom nazivaju gasovi i tečnosti, posmatraćemo kao korpuskularne sredine čiji su delići vrlo pokretljivi. Pri tom pod delićem podrazumevamo vrlo malu količinu fluida. Dakle, smatraćemo da se fluid u određenoj oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$ sastoji od skupa $\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in V\}$ tačaka koje ćemo nazivati delićima.

Posmatrajmo fluid u kome se delići kreću i sa $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ označimo polje brzina delića fluida. Pretpostavimo da brzina svakog delića (x,y,z) zavisi samo od mesta u polju. Sa $\rho(x,y,z)$ označimo gustinu fluida i definišimo maseni protok fluida $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ u tački (x,y,z), stavljanjem

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \rho(x,y,z)\,\vec{v}(x,y,z).$$

Prema ovoj definiciji, maseni protok $\overrightarrow{F}$ pokazuje masu fluida koja bi u jedinici vremena proticala kroz ravan presek jedinične površine, kada bi gustina fluida bila jednaka $\rho(x,y,z)$, a smer proticanja bi se poklapao sa smerom vektora $\vec{v}$.



Sl. 6.7.1

Uočimo proizvoljnu tačku $A(x,y,z)$ u oblasti V fluida. Konstruišimo mali pravougli paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivica Δx, Δy, Δz, sl. 1. Pretpostavićemo da su brzina $\vec{v}$ delića fluida i gustina fluida približno konstantni na pravougaoniku $ABCD$. Ako je vektor $\overrightarrow{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ poznat, onda masa fluida koja u jedinici vremena protekne u posmatrani paralelepiped u smeru x-ose iznosi $P(x,y,z)\,\Delta y\,\Delta z$. Pod sličnim uslovima, masa fluida koja za jedinicu vremena istekne iz paralelepipeda u smeru x-ose iznosi $P(x+\Delta x,y,z)\,\Delta y\,\Delta z$. Dakle, izraz

$$(1) \qquad \big(P(x+\Delta x,y,z) - P(x,y,z)\big)\,\Delta y\,\Delta z$$

pokazuje razliku mase fluida koja izlazi i one koja ulazi u paralelepiped u smeru x-ose.

Na isti način dobijaju se razlike

$$(2) \qquad \big(Q(x,y+\Delta y,z) - Q(x,y,z)\big)\,\Delta z\,\Delta x,$$

odnosno

$$(3) \qquad \big(R(x,y,z+\Delta z) - R(x,y,z)\big)\,\Delta x\,\Delta y,$$

mase fluida koja izlazi i one koja ulazi u paralelepiped u pravcu y-ose, odnosno z-ose.

Zbir masa (1), (2) i (3) podelimo zapreminom $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ paralelepipeda i pustimo da $D = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \to 0$. Dobijamo

$$\lim_{D\to 0}\left(\frac{P(x+\Delta x,y,z)-P(x,y,z)}{\Delta x} + \frac{Q(x,y+\Delta y,z)-Q(x,y,z)}{\Delta y} + \frac{R(x,y,z+\Delta z)-R(x,y,z)}{\Delta z}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\overrightarrow{F}$$

(ako limes postoji).

Dakle, $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ predstavlja promenu mase fluida, svedenu na jedinicu zapremine i jedinicu vremena.

Tačke u kojima je $\operatorname{div}\overrightarrow{F} > 0$ nazivaju se *izvorima*, a one u kojima je $\operatorname{div}\overrightarrow{F} < 0$ su *ponori*. ▲

Rotor

Neka je vektorsko polje $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ diferencijabilno. Promenljivi vektor

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

naziva se *rotorom* vektorskog polja $\vec{v}$ i označava sa $\operatorname{rot}\vec{v}$.

Teorema 6.7.2

Ako je $u(x,y,z)$ skalarno polje, $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ i $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{\imath} + w_2(x,y,z)\vec{\jmath} + w_3(x,y,z)\vec{k}$ su vektorska polja, definisana i diferencijabilna u oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$, a C_1, C_2 su proizvoljne konstante, onda je:

1° $\operatorname{rot}(C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1 \operatorname{rot}\vec{v} + C_2 \operatorname{rot}\vec{w}$;

2° $\operatorname{rot} u\vec{v} = u \operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{grad} u \times \vec{v}$.

Dokaz.

1° Sledi neposrednom proverom.

2° Projekciju vektora $\operatorname{rot} u\vec{v}$ na x-osu označimo sa $\operatorname{rot}_x u\vec{v}$. Tada je

$$\operatorname{rot}_x u\vec{v} = \frac{\partial(uv_3)}{\partial y} - \frac{\partial(uv_2)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y}v_3 + u\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}v_2 - u\frac{\partial v_2}{\partial z}$$
$$= u\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}v_3 - \frac{\partial u}{\partial z}v_2\right) = u \operatorname{rot}_x \vec{v} + (\operatorname{grad} u \times \vec{v})_x.$$

Slično se dobijaju i $\operatorname{rot}_y u\vec{v}$ i $\operatorname{rot}_z u\vec{v}$. ■

Primeri 6.7.2

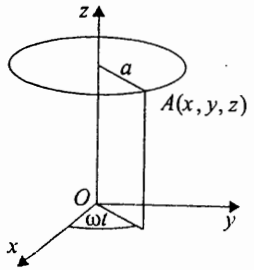
1° Neka je $\vec{c}$ konstantan vektor i $f(r)$ diferencijabilna skalarna funkcija ($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Izračunajmo $\operatorname{rot} f(r)\vec{c}$.

Prema teoremi 2 imamo

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{c} = f(r)\operatorname{rot}\vec{c} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{c}.$$

Kako je $\operatorname{rot}\vec{c} = 0$ i $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$, to je

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{c} = \frac{f'(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{c}).$$



Sl. 6.7.2

2° Uočimo kruto telo koje se kreće konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose Oz u koordinatnom sistemu $Oxyz$. Neka je $A(x,y,z)$ proizvoljna tačka tela koja se ne nalazi na osi Oz, sl. 2. Smatraćemo da je vektor $\vec{\omega}$, intenziteta ω, usmeren u pozitivnom smeru z-ose, tj. da je $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Za vektor položaja $\vec{r}$ tačke A imamo $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + a\sin\omega t\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, gde je $a = \sqrt{x^2+y^2}$ konstantno, a t je vreme. Brzina $\vec{v}$ tačke A data je izrazom

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + a\omega\cos\omega t\,\vec{j},$$

odakle je

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \omega\vec{k} = \vec{\omega}.$$

Dakle, rotor služi kao mera rotacije tačke.

3° Koristeći uvedeni pojam rotora, teoreme 3.1 i 3.2 mogu se iskazati na sledeći način.

Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$ zadato neprekidno diferencijabilno vektorsko polje $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$. Tada su sledeći uslovi međusobno ekvivalentni:

(a) U oblasti V postoji neprekidno diferencijabilno skalarno polje u, takvo da je $\operatorname{grad} u = \vec{v}$.

(b) Rad $\int_{AB}\vec{v}\cdot d\vec{r}$ polja $\vec{v}$ po putu $AB \subset V$ ne zavisi od oblika puta, već samo od početne i krajnje tačke.

(c) Cirkulacija $\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$ polja $\vec{v}$ po proizvoljnoj zatvorenoj krivoj $C \subset V$ jednaka je nuli.

(d) $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

Vektorsko polje $\vec{v}$ koje ima neko od navedena četiri ekvivalentna svojstva naziva se *potencijalnim poljem*; skalarno polje u za koje je $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ je *potencijal* polja $\vec{v}$. Primeri potencijalnih polja su gravitaciono i elektrostatičko polje. ▲

Operacije drugog reda

Divergencija $\operatorname{div}\vec{v}$ vektorske funkcije $\vec{v}$ predstavlja skalarnu funkciju, dok gradijent $\operatorname{grad} u$ skalarne funkcije u i rotor $\operatorname{rot}\vec{v}$ vektorske funkcije $\vec{v}$ predstavljaju vektorske funkcije. Dakle, možemo govoriti o funkcijama $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}$. Operacije grad div, div grad, rot grad, div rot, rot rot nazivaju se nekad *operacijama drugog reda.*

Razmotrimo neka svojstva operacija drugog reda.

Neka je $u = u(x,y,z)$ dato dvaput neprekidno diferencijabilno skalarno polje. Tada je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Poslednji izraz označimo sa Δu. Simbol diferenciranja $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ naziva se *Laplasovim operatorom* ili *laplasijanom.* Dakle je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = \Delta u. \tag{4}$$

Pokažimo da je

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0. \tag{5}$$

Zaista, iz $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \operatorname{rot}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$ imamo

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 0.$$

Slično se dobija $\operatorname{rot}_y \operatorname{grad} u = \operatorname{rot}_z \operatorname{grad} u = 0$.

Neka je $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ dvaput neprekidno diferencijabilno vektorsko polje. Pokažimo da je

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0. \tag{6}$$

Zaista,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0.$$

Uvedimo još oznaku

$$\Delta\vec{v} = \Delta v_1\,\vec{i} + \Delta v_2\,\vec{j} + \Delta v_3\,\vec{k}.$$

Pokažimo jednakost

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}. \tag{7}$$

U cilju dokaza izračunajmo

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_x \operatorname{rot}\vec{v} &= \operatorname{rot}_x\left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial z}.\end{aligned}$$

Dodavanjem poslednjem izrazu sabirka $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$, dobija se

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_x \operatorname{rot}\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right)\\ &= (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v})_x-(\Delta\vec{v})_x.\end{aligned}$$

Slično se dobija

$$\operatorname{rot}_y \operatorname{rot}\vec{v} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v})_y-(\Delta\vec{v})_y,$$
$$\operatorname{rot}_z \operatorname{rot}\vec{v} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v})_z-(\Delta\vec{v})_z.$$

Primer 6.7.3

Neka je $f(r)$ dvaput diferencijabilna funkcija. Izračunajmo $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$.

Kako je $\operatorname{grad} f(r)=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}$, to je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right),$$

a prema primeru 1.1° je $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)=3\frac{f'(r)}{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{f'(r)}{r}$, odakle dobijamo

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)=2\frac{f'(r)}{r}+f''(r). \quad \blacktriangle$$

Operator nabla

U cilju jednostavnijeg izražavanja gradijenta, rotora i divergencije uvodi se pojam simboličkog vektora, odnosno vektorsko-diferencijalnog operatora *nabla*, u oznaci

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Primena operatora ∇ na skalarnu funkciju $u(x,y,z)$, po definiciji daje

$$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\operatorname{grad} u.$$

Primena simboličkog vektora ∇ na vektorsku funkciju $\vec{v}=v_1(x,y,z)\vec{i}+v_2(x,y,z)\vec{j}+v_3(x,y,z)\vec{k}$ po definiciji daje

$$\nabla\cdot\vec{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{v}.$$

Vektorski proizvod vektora ∇ i vektora $\vec{v}$ daje simboličku determinantu

$$\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\operatorname{rot}\vec{v}.$$

u kojoj se umesto množenja elemenata druge i treće vrste vrši diferenciranje.

Lako se pokazuje da za diferencijabilna skalarna polja $u(x,y,z)$ i $v(x,y,z)$, diferencijabilnu funkciju f i konstantu C važi:

1° $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$;

2° $\nabla(Cu)=C\nabla u$;

3° $\nabla(u\cdot v)=u\nabla v+v\nabla u$;

4° $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$;

5° $\nabla f(u)=f'_u\nabla u$.

Za dvaput neprekidno diferencijabilna vektorska polja $\vec{v}$ i $\vec{w}$, skalarnu funkciju $u(x,y,z)$ i konstante C_1, C_2 važi:

1° $\nabla\cdot(C_1\vec{v}+C_2\vec{w})=C_1(\nabla\cdot\vec{v})+C_2(\nabla\cdot\vec{w})$;

2° $\nabla\times(C_1\vec{v}+C_2\vec{w})=C_1(\nabla\times\vec{v})+C_2(\nabla\times\vec{w})$;

3° $\nabla\cdot(u\vec{v})=u(\nabla\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\nabla u$;

4° $\nabla\times(u\vec{v})=u(\nabla\times\vec{v})+(\nabla u)\times\vec{v}$;

5° $\nabla\cdot(\nabla u)=\Delta u$;

6° $\nabla\times(\nabla u)=0$;

7° $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})=0$;

8° $\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\Delta\vec{v}$.

(v. teoreme 1 i 2 i jednakosti (4), (5), (6), (7)).

6.8. STOKSOVA FORMULA

Neka je S ograničena, glatka, dvostrana površ, sa deo-po-deo glatkom granicom Γ. Pretpostavimo da se S može bijektivno projektovati na svaku od koordinatnih ravni. Neka su funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ neprekidne i imaju

neprekidne parcijalne izvode u nekoj okolini površi S. Tada važi jednakost (*Stoksova* formula*)

$$(1)\quad \oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Pri tom se smer krivolinijskog integrala na levoj strani jednakosti (1) uzima tako da prilikom obilaženja orijentisane površi S po krivoj Γ, površ ostaje s leve strane.

Dokažimo formulu (1).

Napišimo tu formulu u obliku

$$(2)\quad \oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

gde su α, β, γ uglovi koje izabrani smer normale $\vec{n}$ na orijentisanu površ S gradi sa osama Ox, Oy, Oz, respektivno. Pokažimo da važi jednakost

$$(3)\quad \oint_\Gamma P\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS.$$

Jednačina površi S može se napisati u obliku $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, gde je $D\subset\mathbf{R}^2$ projekcija površi S na ravan Oxy. Označimo li, kao i obično, $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, imaćemo

$$\cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Pri tom vektor $\vec{n}$ normale na površ sa z-osom zaklapa oštar ugao. Integral I na desnoj strani jednakosti (3) napišimo u obliku

$$I=\iint_S -\left(\frac{\partial P}{\partial y}+q\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\gamma\,dS.$$

Kako je, s druge strane,

$$\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,f(x,y)))=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}q,$$

označivši granicu oblasti D (tj. projekciju krive Γ na ravan Oxy) sa L, prema jednakosti (5) odeljka 6, imaćemo

$$I=-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,f(x,y)))\,dx\,dy.$$

Prema Grinovoj formuli je

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,f(x,y)))\,dx\,dy=\oint_L P(x,y,f(x,y))\,dx,$$

gde se obilazak po krivoj L vrši tako da oblast D ostaje s leve strane.

* G. G. Stokes (1819–1903), engleski matematičar

Kako je

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,dx=\oint_L P(x,y,f(x,y))\,dx,$$

to je

$$I=\oint_\Gamma P(x,y,z)\,dx,$$

čime je jednakost (3) dokazana.

Slično se dokazuju i jednakosti

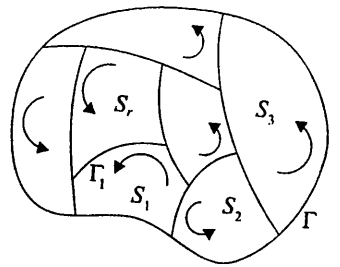
$$(4)\quad \oint_\Gamma Q\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS,$$

$$(5)\quad \oint_\Gamma R\,dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS.$$

Iz (3), (4) i (5) sledi Stoksova formula.

Proverom se pokazuje da Stoksova formula važi i u slučaju kada je površ S deo neke ravni koja je paralelna sa jednom od koordinatnih osa (s tim da je taj deo ravni ograničen deo-po-deo glatkom krivom).

Stoksova teorema važi i u slučaju kada se površ S može predstaviti u obliku $S=S_1\cup\cdots\cup S_r$, gde su S_i ograničene, glatke, dvostrane površi sa deo-po-deo glatkim granicama Γ_i, i svaka od S_i se može projektovati bijektivno na svaku od koordinatnih ravni. Pri tom se S_i i S_j, $i\neq j$, seku najviše po graničnim tačkama, sl. 1. Granica površi S je kriva Γ.



Sl. 6.8.1

Naime, za S_i važi jednakost

$$(6)\quad \oint_{\Gamma_i} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_{S_i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

za $i=1,\dots,r$. Sabiranjem desnih strana jednakosti (6) za $i=1,\dots,r$ dobija se desna strana jednakosti (1), a sabiranjem levih strana jednakosti (6) dobija se leva strana jednakosti (1), jer se $\int_{\Gamma_k^*}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ u zbiru pojavljuje dvaput, no u različitim smerovima integracije. Pri tom su sa Γ_k^* označene one krive koje pripadaju granicama dveju površi S_i.

Stoksova formula u vektorskom obliku

Neka je vektor $\vec{v}$ oblika $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$, a vektor $\vec{n}$ normale na površ S je

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Diferencijal $d\vec{r}$ vektora $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ se može napisati kao

$$d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}.$$

Tada Stoksova formula (2) ima oblik

$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,dS.$$

Primeri 6.8.1

1° Izračunajmo krivolinijski integral

$$I = \oint_L dx + 2x^3y^2\,dy + 3z\,dz,$$

gde je L presek sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ i ravni Oxy, sa smerom obrnutim kretanju kazaljke na satu (gledajući odozgo), i proverimo rezultat upotrebljavajući Stoksovu formulu, korišćenjem gornje polusfere kao površi S.

Jednačine krive L napišimo u obliku $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Tada je

$$I = \int_0^{2\pi} (-a\sin t + 2a^6\cos^4 t\sin^2 t)\,dt = 2a^6\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\,dt = \frac{\pi a^6}{4}.$$

S druge strane, upotrebljavajući formulu (1) stavljanjem $P=1$, $Q=2x^3y^2$, $R=3z$, imaćemo $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y^2$, $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$ i

$$I = 6\iint_S x^2y^2\,dx\,dy = 6\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2\,dx\,dy = 6\cdot\frac{\pi}{24}a^6 = \frac{\pi a^6}{4}.$$

2° Izračunajmo krivolinijski integral

$$I = \oint_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

gde je L presek cilindra $x^2+y^2=a^2$ i ravni $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $a>0$, $c>0$. Smer integracije je obrnut kretanju kazaljke na satu, gledajući odozgo (sa pozitivnog dela z-ose). U cilju primene formule (2) za površ S uzmimo deo ravni $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ unutar cilindra $x^2+y^2=a^2$. Tada, za $P=y-z$, $Q=z-x$, $R=x-y$, imamo $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2$ i formula (2) daje

$$I = -2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS$$

(integracija se vrši po gornjoj strani ravni). Kosinusi uglova α, β, γ su konstantni i iznose

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta = 0,\quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

gde je $z = c - \frac{c}{a}x$, pa je

$$I = -2\iint_S \frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}\,dS = -2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(1+\frac{c}{a}\right)dx\,dy = -2\pi a(a+c). \quad \blacktriangle$$

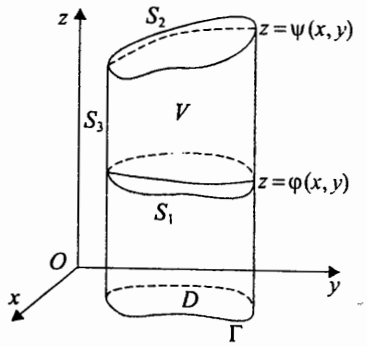
6.9. FORMULA GAUSA-OSTROGRADSKOG

Neka je $V \subset \mathbf{R}^3$ zatvorena oblast ograničena deo-po-deo glatkim površima:

S_1 : $z = \varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$,

S_2 : $z = \psi(x,y)$, $(x,y)\in D$,

$\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y)$, i cilindričnom površi S_3, čija je vodilja deo-po-deo glatka zatvorena kriva Γ u ravni Oxy koja ograničava oblast D, a izvodnice su paralelne osi Oz. Drugačije možemo reći da svaka prava l, paralelna osi Oz, seče granicu ∂V oblasti V u najviše dve tačke, ili na pravoj l nema unutrašnjih tačaka oblasti V. Nazovimo takvu oblast V z-elementarnom. Sa S označimo površ $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, sl. 1.



Sl. 6.9.1

Pretpostavimo da je u oblasti V definisana neprekidna funkcija $R(x,y,z)$, koja ima neprekidan izvod $\frac{\partial R}{\partial z}$. Dokažimo da važi jednakost

$$\iint_S R\,dx\,dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

Pri tom se integral na levoj strani ove jednakosti uzima po spoljašnjoj strani površi S.

Zaista, izraz na desnoj strani jednakosti (1) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy\\ &= \iint_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy\\ &= \iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Označimo sa S_1^- donju stranu površi S_1, sa S_2^+ gornju stranu površi S_2, a sa S_3^+ spoljašnju stranu površi S_3. Imamo

$$\iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy = \iint_{S_2^+} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

$$\iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy = -\iint_{S_1^-} R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

$$\iint_{S_3^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = 0.$$

Tako je

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_2^+} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{S_1^-} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{S_3^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

gde je poslednji površinski integral uzet po spoljašnjoj strani površi S.

Na sličan način kao (1) dokazuje se i nešto opštija jednakost. Pretpostavimo da je zatvorena oblast V x,y,z-elementarna i da je ograničena deo-po-deo glatkom površi S. Neka su u oblasti V definisane neprekidne funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, koje imaju neprekidne izvode $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Tada važi jednakost

$$(2)\qquad \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Pri tom je površinski integral uzet po spoljašnjoj strani površi S.

Uzevši u obzir izraze (6) i (7) odeljka 6, jednakost (2) može se napisati u obliku

$$(3)\qquad \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Formula (2), odnosno (3), koja daje vezu između trojnog integrala po oblasti V i površinskog integrala po granici ∂V te oblasti, naziva se *formulom Gausa-Ostrogradskog* *.

Formula Gausa-Ostrogradskog važi i u slučaju kada se zatvorena oblast V može predstaviti u obliku $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$, gde su V_i x,y,z-elementarne zatvorene oblasti sa deo-po-deo glatkim granicama S_i. Pri tom se V_i i V_j, $i \neq j$, seku najviše po graničnim tačkama. Granica oblasti V je S.

Naime, za oblast V_i važi jednakost

$$(4)\qquad \iint_{S_i} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

* М. В. Остроградский (1801–1862), ruski matematičar

$i = 1, \ldots, r$. Sabiranjem desnih strana jednakosti (4) za $i = 1, \ldots, r$ dobija se desna strana jednakosti (2), a sabiranjem levih strana jednakosti (4) dobija se leva strana jednakosti (2), jer se svaki integral oblika $\iint_{S_k^*} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ u zbiru pojavljuje dvaput, no integriše se po različitim stranama površi S_k^*. Pri tom smo sa S_k^* označili one delove površi S_i koji pripadaju granicama dveju oblasti.

Vektorski oblik formule Gausa-Ostrogradskog

Neka je vektor $\vec{v}$ oblika $\vec{v} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ i vektor normale na površ S je $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}$. Tada je $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ i $\vec{v}\cdot\vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, pa se (3) može napisati u obliku

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz.$$

Ova formula kaže da je trojni integral divergencije vektora $\vec{v}$ po oblasti V jednak protoku vektora $\vec{v}$ kroz granicu oblasti V.

Primeri 6.9.1

1° Stavimo u formuli (2) $P = x$, $Q = y$, $R = z$. Tada se dobija

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 3\iiint_V dx\,dy\,dz,$$

odnosno

$$\mu V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

2° Neka je S površ jedinične kocke $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Koristeći formulu (2) izračunajmo integral

$$I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

po spoljašnjoj strani kocke.

Prema (2) imamo

$$I = 2\iiint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz = 3.$$

3° Izračunajmo površinski integral

$$I = \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS,$$

gde je S deo konusne površi $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, a $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}$ je normala na spoljašnju stranu površi.

Na integral se ne može primeniti formula (3) jer površ nije zatvorena. Posmatrajmo, međutim, površ $S_1 = \{(x,y,z) \mid z = h,\ x^2+y^2 \leqslant h^2\}$. Ako označimo $S_2 = S \cup S_1$, onda važi jednakost

$$I = \iint_{S_2} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS - \iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS,$$

gde se prvi integral uzima po spoljašnjoj strani površi S_2, a drugi po gornjoj strani površi S_1.

Označimo prvi integral u poslednjoj jednakosti sa I_1, a drugi sa I_2. Tada je

$$I_1 = 2\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

gde je oblast $V \subset \mathbf{R}^3$ ograničena sa S_2. Prelaskom na polarno-cilindrične koordinate imamo

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r\,dr \int_r^h (r\cos\theta + r\sin\theta + z)\,dz = \frac{\pi}{2}h^4.$$

Za izračunavanje integrala I_2 primetimo da je $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma\,dS = dx\,dy$, odakle sledi

$$I_2 = h^2 \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} dx\,dy = \pi h^4.$$

Dakle je $I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4$.

4° Diferencijabilno vektorsko polje $\vec{v}$ za koje je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ u svim tačkama neke oblasti $V \subset \mathbf{R}^3$, naziva se *solenoidalnim.*

Pretpostavimo da je oblast V takva da za svaku prostu zatvorenu površ S, čije sve tačke pripadaju oblasti V, i sve tačke dela prostora čija je granica površ S takođe pripadaju oblasti V. Takve oblasti se obično nazivaju *prostorno prosto povezanim* (za razliku od prosto povezanih oblasti u smislu odeljka 3, koje se još nazivaju *površinski prosto povezanim*). Na primer, unutrašnjost torusa je prostorno prosto povezana oblast, a oblast $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ to nije.

Na osnovu formule Gausa-Ostrogradskog, iz prostorne proste povezanosti oblasti V neposredno sledi da za solenoidalno polje $\vec{v}$ važi da je njegov fluks kroz proizvoljnu prostu zatvorenu površ $S \subset V$ jednak nuli,

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz = 0,$$

gde je $T \subset V$ oblast ograničena površi S.

Može se dokazati da je pomenuti uslov anuliranja fluksa polja $\vec{v}$ ne samo neophodan, već i dovoljan da bi to polje bilo solenoidalno.

Pomenimo još jedan neophodan i dovoljan uslov da polje $\vec{v}$ bude solenoidalno — to je uslov da u oblasti V postoji dvaput diferencijabilno polje $\vec{w}$, takvo da je $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$. Da je taj uslov dovoljan sledi iz (6) odeljka 7, jer je tada

$$\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{w} = 0.$$

Za dokaz neophodnosti pomenutog uslova v. npr. [32]. Polje $\vec{w}$ koje je na ovaj način vezano sa poljem $\vec{v}$, naziva se *vektorskim potencijalom* polja $\vec{v}$.

Najzad, pomenimo i sledeću činjenicu, čiji se dokaz takođe može naći u [32].

Svako glatko vektorsko polje $\vec{v}$ može se predstaviti kao zbir jednog potencijalnog i jednog solenoidalnog polja,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \operatorname{rot}\vec{v}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0. \ \blacktriangle$$

ZADACI

1. Dokazati da za krivolinijski integral važi

$$\left|\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right| \leqslant d_L \cdot M,$$

gde su P i Q neprekidne funkcije, d_L je dužina deo-po-deo glatkog luka L i $M = \max\limits_{(x,y)\in L} \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$.

2. Proceniti integral $I_r = \int_L \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$, gde je L krug $x^2+y^2 = r^2$. Dokazati da je $\lim\limits_{r\to\infty} I_r = 0$.

3. Odrediti dve dvaput neprekidno diferencijabilne funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$, tako da krivolinijski integral

$$I = \oint_L P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

po zatvorenoj krivoj L, ne zavisi od konstanti α, β.

4. Neka je $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $P,\ Q\colon D \to \mathbf{R}$, $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ i $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant 0, (x,y) \neq (0,0)\}$.

1° Ako je C prosta, deo-po-deo glatka zatvorena kriva u D, dokazati da $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ može uzeti jednu od vrednosti: 0, 2π, -2π.

2° Za $(a,b) \in A$, neka je $f(a,b) = \int_L P\,dx + Q\,dy$, gde je L putanja u A, s početnom tačkom $(1,0)$ i krajnjom tačkom (a,b). Pokazati da je

$$f(a,b) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{ako je } a > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ako je } a = 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{ako je } a < 0. \end{cases}$$

5. Neka su $u(x,y)$, $v(x,y)$ skalarna polja sa neprekidnim drugim parcijalnim izvodima u oblasti $D \subset \mathbf{R}^2$. Ako je $S \subset D$ skup ograničen prostom, zatvorenom, deo-po-deo glatkom krivom C, pokazati da važi

$$\oint_C uv\,dx + uv\,dy = \iint_S \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\,dy.$$

6. Oblast u ravni sa jednim „otvorom" nazovimo „dvostruko povezanom" (takva oblast je, na primer, kružni prsten). Ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidno diferencijabilne realne funkcije u dvostruko povezanoj oblasti $D \subset \mathbf{R}^2$ i ako je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$, koju vrednost može imati $\oint_C P\,dx + Q\,dy$, gde je C prosta, deo-po-deo glatka zatvorena kriva u skupu D?

7. Neka je C deo-po-deo glatka kriva u ravni Oxy i neprekidna i pozitivna funkcija $f(x,y)$ je definisana u tačkama krive C. Dokazati da površina površi

$$S = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \in C, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\,\}$$

iznosi $\mu S = \int_C f(x,y)\,ds$.

8. Ako se realna funkcija $f(x)$ na $[a,b]$ može predstaviti u obliku $f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$, gde je φ apsolutno integrabilna na $[a,b]$ (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu), dokazati da je f ograničene varijacije na $[a,b]$ i važi $V_f(a,b) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$.

9. Ako su f, $g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ funkcije ograničene varijacije, dokazati da su i fg i f/g ograničene varijacije (poslednja pod pretpostavkom da je $|g(x)| \geqslant \alpha > 0$ na $[a,b]$).

10. 1° Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ funkcija ograničene varijacije. Ako je f u nekoj tački segmenta $[a,b]$ neprekidna, dokazati da je u toj tački neprekidna i funkcija $D(x)$ iz dokaza teoreme 4.4.

2° Dokazati da se svaka neprekidna funkcija ograničene varijacije može predstaviti kao razlika dve neprekidne rastuće funkcije.

11. Za koje vrednosti parametara α, $\beta \in \mathbf{R}$ je funkcija $f(x) = x^\alpha \sin^\beta x$, $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 0$, ograničene varijacije na $[0,1]$?

12. Dokazati da je u skupu funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ sa

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + V_{f-g}(a,b)$$

definisana metrika.

13. Dokazati *Žordanovu teoremu*: Da bi kriva $\vec{r} = \vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, bila rektificibilna, neophodno je i dovoljno da su funkcije φ, ψ i χ ograničene varijacije na $[\alpha,\beta]$.

14. Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, a funkcija α zadovoljava Lipšicov uslov na $[a,b]$, dokazati da je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$.

15. Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, a funkcija α se može predstaviti u obliku $\alpha(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$, gde je funkcija φ apsolutno integrabilna na $[a,b]$, dokazati da je $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ i da važi

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

16. Neka je funkcija $f(x)$ na $[a,b]$ neprekidna, a funkcija $\alpha(x)$ ima izvod $\alpha'(x)$ na $[a,b]$, osim u konačnom broju tačaka $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ u kojima $\alpha(x)$ ima prekide prve vrste, pri čemu je $\alpha'(x)$ apsolutno integrabilna funkcija na $[a,b]$. Dokazati da je tada

$$(S)\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx + f(a)[\alpha(a+0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b-0)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[\alpha(c_k+0) - \alpha(c_k-0)].$$

17. Ako je $\alpha\colon [0,\pi] \to \mathbf{R}$ monotona funkcija i $\int_0^\pi \sin x\,d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0)$, dokazati da je funkcija α konstantna u svakom od intervala $[0,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi]$, a u tački $\pi/2$ važi

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$

18. Neka je f ograničena, a α rastuća funkcija na $[a,b]$. Ako se donji i gornji Darbu-Stiltjesov integral funkcije f po funkciji α definišu pomoću

$$\underline{I}(f,\alpha) = \sup_P s(f,\alpha,P), \quad \overline{I}(f,\alpha) = \inf_P S(f,\alpha,P)$$

(oznake su uvedene pre teoreme 4.5), primerom pokazati da uslov $\underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha)$ nije dovoljan da bi bilo $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a,b]$.

19. 1° Neka je funkcija $f \in C[a,b]$, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$, a funkcija α je ograničene varijacije na $[a,b]$ i $V = V_\alpha(a,b)$. Dokazati da je

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant MV.$$

2° Neka su funkcije $f_n\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidne, $n \in \mathbf{N}$, i $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na $[a,b]$. Ako je α funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$, dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f\,d\alpha.$$

3° Neka je $f \in C[a,b]$ i α_n su funkcije ograničene varijacije na $[a,b]$, takve da je $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \alpha(x)$, $x \in [a,b]$. Ako su funkcije α_n *uniformno ograničene varijacije*, tj. ako postoji $V \in \mathbf{R}$, takvo da je $V_{\alpha_n}(a,b) \leqslant V$ za sve $n \in \mathbf{N}$, dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,d\alpha_n = \int_a^b f\,d\alpha.$$

20. Dokazati Poasonovu formulu

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

pri čemu je S površ sfere $x^2+y^2+z^2=1$, a funkcija f je neprekidna.

21. Izračunati integral $F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,dS$, gde je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{ako je } x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$$

22. Izračunati $F(x,y,z,t) = \iint_S f(u,v,w)\,dS$, gde je S sfera $(u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2 = t^2$ i

$$f(u,v,w) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } u^2+v^2+w^2 < a^2, \\ 0, & \text{ako je } u^2+v^2+w^2 \geqslant a^2. \end{cases}$$

23. Ako je $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{c}$ je konstantan vektor, a $f(r)$ je data (dovoljno glatka) funkcija, naći:

1° $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$; 2° $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})$; 3° $\operatorname{rot}(\vec{c}\times f(r)\vec{r})$.

24. Ako je $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, naći n tako da je $\operatorname{div}(r^n\cdot\vec{r}) = 0$.

25. Pokazati da je polje

$$\vec{u} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$$

potencijalno i naći potencijal.

26. Pokazati da postoji i naći primitivnu funkciju $u(x,y,z)$, ako je $du = (x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$.

27. Izračunati integral

$$\int_{AB} (x^2-yz)\,dx + (y^2-zx)\,dy + (z^2-xy)\,dz$$

po luku zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht/2\pi$, od tačke $A(a,0,0)$ do tačke $B(a,0,h)$.

28. Neka je L zatvorena kriva u ravni $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ i P je površina dela ravni koji ograničava L. Dokazati jednakost

$$\oint_L (y\cos\alpha - z\cos\beta)\,dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,dz = 2P,$$

pri čemu je smer integracije pozitivan.

29. Dokazati da zapremina V tela, ograničenog površi S, iznosi

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi normale po spoljašnjoj strani površi S.

30. Neka je S zatvorena površ koja ograničava deo prostora $V \subset \mathbf{R}^3$, $\vec{n}$ je spoljašnja normala na površ S u tački (u,v,w), a $\vec{r}$ je vektor s početnom tačkom (x,y,z) i krajnjom (u,v,w), $r = |\vec{r}|$.

1° Dokazati formulu

$$\iiint_V \frac{du\,dv\,dw}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})\,dS.$$

2° Ako je S prosta zatvorena glatka površ, izračunati *Gausov integral*

$$f(x,y,z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS.$$

31. Dvodimenzionalno polje sile $\vec{v}$ dato je jednačinom $\vec{v}(x,y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j}$, gde je c pozitivna konstanta. Ova sila dejstvuje na materijalnu tačku, pokrećući je od tačke $(0,0)$ do prave $x=1$, duž krive $y = ax^b$, a, $b > 0$. Naći vrednost a (u zavisnosti od c), tako da je izvršeni rad nezavisan od b.

32. Neka su $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ dva neprekidno diferencijabilna skalarna polja na otvorenom skupu koji sadrži kružnu površ $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Naći vrednost integrala

$$\iint_K \vec{v}\cdot\vec{w}\,dx\,dy,$$

ako je $\vec{v}(x,y) = u_2(x,y)\vec{i} + u_1(x,y)\vec{j}$, $\vec{w}(x,y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\vec{j}$, a na krugu $x^2+y^2=1$ je $u_1(x,y) = 1$, $u_2(x,y) = y$.

33. Neka vektorska polja $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ zadovoljavaju jednačine

$$\operatorname{rot}\vec{v_1} = c\vec{v_2}, \quad \operatorname{rot}\vec{v_2} = c\vec{v_1}, \tag{1}$$

gde je $c \neq 0$ konstanta.

1° Pokazati da je $\operatorname{div}\vec{v_1} = \operatorname{div}\vec{v_2} = 0$ i da $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ zadovoljavaju parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\Delta\vec{w} + c^2\vec{w} = 0.$$

2° Ako je $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, i u_1, u_2 su skalarna polja koja zadovoljavaju jednačinu $\Delta u + c^2u = 0$, pokazati da vektorska polja

$$\vec{v_1} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u_1\vec{r}) + c\operatorname{rot}(u_2\vec{r}), \quad \vec{v_2} = c\operatorname{rot}(u_1\vec{r}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u_2\vec{r})$$

zadovoljavaju (1).

34. Glatka površ S data je jednačinom $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Neka je $\vec{n}$ jedinična normala na površ S, s tim da $\vec{n}$ zaklapa oštar ugao sa z-osom. Za vektorsko polje $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ važi

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dx\,dy.$$

Dokazati.

35. Neka je $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$, gde je $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $R = z$, i V je torus dobijen rotacijom kruga $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ oko z-ose. Pokazati da je $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ unutar V, ali $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \neq 0$, gde je $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$.

36. (a) Neka je S glatka zatvorena površ u $\mathbf{R}^3$ koja ograničava telo V i neka su u, v dvaput diferencijabilna skalarna polja, definisana na $\overline{V}$. Dokazati *Grinove formule*:

$$1^\circ \quad \iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

$$2^\circ \quad \iiint_V v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz = -\iiint_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\,dx\,dy\,dz + \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

$$3^\circ \quad \iiint_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS,$$

gde je n spoljašnja normala na površ S.

(b) Za funkciju $u \in C^2(V, \mathbf{R})$ se kaže da je *harmonijska* u V ako je $\Delta u = 0$ u V. Dokazati da je funkcija u harmonijska ako i samo ako je $\iint_S \dfrac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0$ za svaku prostu zatvorenu površ $S \subset V$.

(c) Ako je funkcija u harmonijska u zatvorenoj oblasti $\overline{V}$, dokazati da su vrednosti te funkcije u unutrašnjosti te oblasti jednoznačno određene njenim vrednostima na granici ∂V oblasti $\overline{V}$.

(d) Ako je u harmonijska funkcija u oblasti V, $(x_0,y_0,z_0) \in V$ i S je sfera poluprečnika R sa centrom u (x_0,y_0,z_0), dokazati da je

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)\,dS.$$

(e) Ako je funkcija u harmonijska u oblasti V i neprekidna je na $\overline{V}$, onda ona ne dostiže svoju maksimalnu (minimalnu) vrednost na ∂V (osim ako je konstantna).

37. 1° Dokazati da je unutrašnjost kruga u prostoru $\mathbf{R}^2$ prosto povezana oblast.

2° Dokazati da je oblast $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid r_1 < x^2 + y^2 + z^2 < r_2\}$, $r_1 < r_2$, prosto povezana.

7. INTEGRALI KAO FUNKCIJE PARAMETRA

Određeni Rimanov integral $\int_a^b f(x)\,dx$ date integrabilne realne funkcije f na fiksiranom odsečku $[a,b]$ realne prave je fiksiran realan broj. Ako, međutim, podintegralna funkcija tog integrala ili njegove granice (ili oboje) zavise od nekog (realnog) parametra y, tj. ako je taj integral oblika $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$, onda je jasno da je rezultat te integracije neka funkcija promenljive y, definisana za one vrednosti te promenljive za koje odgovarajući integral postoji. Često takva funkcija nije elementarna ili nije jednostavno naći njen elementaran zapis. Zato je važno znati metode pomoću kojih se, bez izračunavanja integrala, takve funkcije mogu ispitivati. U ovoj glavi bavićemo se problemima te vrste, s tim što ćemo se u prvom odeljku zadržati na svojstvenim integralima, a u sledećim odeljcima ćemo proširiti razmatranja na nesvojstveni slučaj.

7.1. SVOJSTVENI PARAMETARSKI INTEGRALI

Kao i kod funkcija definisanih kao granice funkcionalnih nizova ili sume funkcionalnih redova (ili, uopšte, kao granice nekih familija funkcija), većina problema prilikom ispitivanja osobina (limesa, neprekidnosti, diferencijabilnosti, integrabilnosti) funkcija definisanih parametarskim integralima vezana su za mogućnost promene redosleda dvaju graničnih prelaza. U vezi sa nalaženjem limesa funkcije

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

neposredna preformulacija teoreme 1.3.3 daje

Stav 7.1.1

Ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna po x na segmentu $[a,b]$, za svako y iz neke okoline V tačke $y_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ i ako $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ po $x \in [a,b]$, onda je

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

■

U slučaju da važi formula (2) kaže se da se limes funkcije $I(y)$ kad $y \to y_0$ može naći „ulaskom pod znak integrala".

Proveravanje uslova ravnomerne konvergencije iz ovog stava u nekim slučajevima se može olakšati primenom Dinijevog stava 1.3.1. Naime, lako je proveriti da tvrđenje tog stava ostaje na snazi ako se umesto funkcionalnog niza $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ posmatra proizvoljna familija funkcija $(f(x,y))_{y\in Y}$, pri čemu su sve vrednosti $y \in Y \subset \mathbf{R}$ manje (veće) od y_0 i granični prelaz se vrši kad $y \to y_0$, monotono po y. (Za dokaz te činjenice može se, na primer, koristiti zadatak 1.20.) Zato važi

Posledica 7.1.1

Ako je, za svako $y < y_0$ ($y > y_0$) iz neke okoline V tačke y_0, $f(x,y)$ neprekidna funkcija od $x \in [a,b]$, koja kad y rastući (opadajući) teži y_0 takođe monotono (po y) teži funkciji $\varphi(x)$, neprekidnoj na $[a,b]$, tada važi jednakost (2). ■

U sledećem stavu dat je dovoljan uslov neprekidnosti funkcije (1).

Stav 7.1.2

Neka je P pravougaonik $[a,b]\times[c,d]$ i neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija na P. Tada je $I(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$.

Dokaz.

Funkcija f je, kao neprekidna, ravnomerno neprekidna na kompaktnom skupu P. Dakle, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da je $|f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon$ čim je $(x',y'), (x'',y'') \in P$ i $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$. Neka su y_0 i y proizvoljne tačke iz $[c,d]$ i x proizvoljan element segmenta $[a,b]$. Uzimajući u prethodnom uslovu $x' = x'' = x$, $y' = y$ i $y'' = y_0$ dobijamo da je $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$ za sve $x \in [a,b]$ ako je $|y - y_0| < \delta$. Drugim rečima, važi $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ $(y \to y_0)$ po $x \in [a,b]$. Iz stava 1 sledi da je

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = I(y_0),$$

tj. funkcija $I(y)$ je neprekidna u tački y_0. Zbog proizvoljnosti y_0, time je tvrđenje stava dokazano. ■

Stav 7.1.3

Neka je $P = [a,b]\times[c,d]$ i funkcija $f\colon P \to \mathbf{R}$ zadovoljava sledeće uslove:

1° f je neprekidna po $x \in [a,b]$ za svako $y \in [c,d]$;

2° f ima parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ koji je neprekidna funkcija na P.

Tada je funkcija definisana relacijom (1) *neprekidno diferencijabilna na $[c,d]$ i važi*

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{3}$$

Dokaz.

Na osnovu pretpostavke 1°, funkcija $I(y)$ je definisana za svako $y \in [c,d]$. Neka je $y \in [c,d]$ i $h \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ tako da $y + h \in [c,d]$. Lagranžova teorema, primenjena na $f(x,y)$, shvaćenu kao funkciju od y na $[y, y+h]$ za fiksirano $x \in [a,b]$, daje $\dfrac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h)$, odnosno, posle integracije,

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h)\,dx, \tag{4}$$

za neko θ, $0 < \theta < 1$. Slično kao u dokazu stava 2, neprekidnost (dakle i ravnomerna neprekidnost) funkcije $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ na P povlači da $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h) \rightrightarrows \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $(h \to 0)$ po $x \in [a,b]$. Zato se sa limesom kad $h \to 0$ može „ući" pod znak integrala u jednakosti (4), što kao rezultat daje formulu (3). Neprekidnost funkcije $I'(y)$ je posledica te formule, pretpostavke 2° i prethodnog stava. ■

Dokazana formula (3) često se naziva *Lajbnicovim pravilom* o diferenciranju parametarskog integrala. Njena primena ponekad omogućava i efektivno računanje integrala (1).

Primer 7.1.1

Izračunajmo integral

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \qquad |y| < 1.$$

Primetimo da, ako sa $f(x,y)$ označimo njegovu podintegralnu funkciju, važi $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x,y) = 2y$ za $|y| < 1$, te dati integral nije nesvojstven. Ako se funkcija $f(x,y)$ za $x = \pi/2$ dodefiniše dobijenom vrednošću limesa, ona postaje neprekidna po x na $[0,\pi/2]$ za svako y, $|y| < 1$, a njen parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ je neprekidna funkcija na $[0,\pi/2]\times(-1,1)$. Prema Lajbnicovom pravilu dobijamo

$$I'(y) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-y^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1,$$

odakle je $I(y) = \pi\arcsin y + C$ za neku konstantu C. Stavljajući $y = 0$ dobijamo $0 = I(0) = C$, pa je konačno $I(y) = \pi\arcsin y$ za $|y| < 1$.

Primetimo da, mada je u stavu 3 pretpostavljeno da y pripada zatvorenom intervalu $[c,d]$, navedena primena na otvoreni interval $(-1,1)$ je takođe dozvoljena, jer se svaka fiksirana tačka y_0 tog intervala može uključiti u neki zatvoreni interval $[c,d]$ koji ceo pripada $(-1,1)$. ▲

Rezultat stava 3 modifikovaćemo sada za slučaj kada i granice integrala zavise od parametra.

Stav 7.1.4

Neka su f *i* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *neprekidne realne funkcije na pravougaoniku* $P = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ *i neka su* $a(y)$ *i* $b(y)$ *diferencijabilne funkcije definisane na* $[c, d]$, *sa vrednostima u* $[\alpha, \beta]$. *Tada je*

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

diferencijabilna funkcija na $[c, d]$ *i važi*

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx - f\big(a(y), y\big)a'(y) + f\big(b(y), y\big)b'(y).$$

Dokaz.

Integral $I(y)$ se može zapisati u obliku

$$I(y) = F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dx, \quad u = a(y),\ v = b(y).$$

Na osnovu stava 3 je $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \displaystyle\int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$, a na osnovu pravila o izvodu integrala po donjoj (gornjoj) granici je $\dfrac{\partial F}{\partial u} = -f\big(a(y), y\big)$ i $\dfrac{\partial F}{\partial v} = f\big(b(y), y\big)$. Primenjujući pravilo o izvodu složene funkcije dobijamo

$$I'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}a'(y) + \frac{\partial F}{\partial v}b'(y),$$

a odatle zamenom sledi tvrđenje stava. ■

Formula ovog stava takođe se naziva Lajbnicovim pravilom.

Stav 7.1.5

Neka je funkcija $f\colon P \to \mathbf{R}$ *neprekidna na pravougaoniku* $P = [a, b] \times [c, d]$. *Tada je funkcija* $I\colon [c, d] \to \mathbf{R}$, *definisana integralom* (1) *integrabilna i važi*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Dokaz.

Na osnovu stava 2, funkcija I je neprekidna, dakle i integrabilna na $[c, d]$. Jednakost navedenih uzastopnih integrala je posledica teoreme 5.4.1, jer su oba ta integrala jednaka $\iint_P f(x, y)\, dx\, dy$. ■

Primer 7.1.2

Primenom stava 5 izračunaćemo integral

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \quad 0 < a < b.$$

Ako podintegralnu funkciju $\varphi(x)$ dodefinišemo pomoću $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = b - a$, lako se proverava da ona postaje neprekidna na $[0, 1]$, pa dati integral postoji. Pored toga je $\varphi(x) = \int_a^b x^y\, dy$ za $x \in [0, 1]$. Funkcija x^y je neprekidna na $[0, 1] \times [a, b]$, pa dobijamo da je

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}. \quad ▲$$

7.2. NESVOJSTVENI INTEGRALI. RAVNOMERNA KONVERGENCIJA

U ovom i sledećim odeljcima posmatraćemo parametarske integrale oblika

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{1}$$

koji su (bar za neke y) nesvojstveni sa singularitetom b, tj. takve da je ili $b = +\infty$ ili je b konačno, ali je funkcija $f(x, y)$ neograničena u okolini tačke $x = b$. Sva razmatranja mogu se analogno preneti na slučaj nesvojstvenih integrala čiji je singularitet donja granica, kao i na one kod kojih su singulariteti obe granice, ili je, pak, singularitet u unutrašnjosti intervala integracije.

Podsetimo se da nesvojstveni integral (1) konvergira za neko y ako za tu vrednost parametra postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{\beta \to b} F(\beta, y)$, gde je

$$F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y)\, dx.$$

Uvešćemo sada pojam ravnomerne konvergencije nesvojstvenog parametarskog integrala.

Definicija 7.2.1

Za integral (1) kažemo da *ravnomerno konvergira po* $y \in Y$ (gde je $Y \subset \mathbf{R}$) ako $F(\beta, y) \rightrightarrows I(y)$ $(\beta \to b)$ po $y \in Y$, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$ tako da za svako $y \in Y$ i svako β, $\beta_0 < \beta < b$, važi

$$|I(y) - F(\beta, y)| = \left|\int_\beta^b f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Primer 7.2.1

Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$ konvergira za $y > 1$. Ako je $Y_1 = [2, \infty)$, onda taj integral ravnomerno konvergira po $y \in Y_1$, jer za $y \geqslant 2$:

$$\int_\beta^\infty \frac{dx}{x^y} = \frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}} \leqslant \frac{1}{\beta} \to 0 \quad (\beta \to \infty).$$

Međutim, ako je $Y_2 = (1, \infty)$, dati integral ne konvergira ravnomerno na Y_2. Zaista, za dato $\beta \in (1, \infty)$ važi:

$$\int_\beta^\infty \frac{dx}{x^y} = \frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}} \to +\infty \quad (y \to 1+0),$$

pa se za dato $\varepsilon > 0$ ne može izabrati $\beta_0 \in (1, \infty)$, tako da nejednakost $\left| \int_\beta^\infty \frac{dx}{x^y} \right| < \varepsilon$ važi za $\beta > \beta_0$, istovremeno za sve $y \in Y_2$. ▲

Opšti Košijev princip ravnomerne konvergencije (teorema 1.1.1) daje sledeći neophodan i dovoljan uslov ravnomerne konvergencije nesvojstvenog parametarskog integrala.

Teorema 7.2.1

Integral (1) *ravnomerno konvergira po* $y \in Y \subset \mathbf{R}$ *ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\beta_0 \in [a, b)$, *takvo da za sve* β', β'' *za koje je* $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$ *i za svako* $y \in Y$ *važi* $\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$. ■

Posledica 7.2.1

Ako je podintegralna funkcija f *integrala* (1) *neprekidna na* $[a, b) \times [c, d]$ *i taj integral konvergira za* $y \in (c, d)$, *ali divergira za* $y = c$ *(odnosno* $y = d$*), onda on neravnomerno konvergira na* (c, d).

Dokaz.

Pretpostavimo da integral (1) divergira, na primer, za $y = c$. Tada postoji $\varepsilon > 0$, takvo da se za svako $\beta_0 \in [a, b)$ mogu naći $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ za koje je $\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, c)\, dx \right| > \varepsilon$. Integral $\int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y)\, dx$ je (svojstveni) parametarski integral koji je (na osnovu stava 1.2) neprekidna funkcija od $y \in (c, d)$. Znači, za vrednosti y, dovoljno bliske c, važiće takođe i nejednakost $\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y)\, dx \right| > \varepsilon$. Dakle, nisu ispunjeni uslovi teoreme 1 za ravnomernu konvergenciju integrala (1) na (c, d). ■

Primetimo da na osnovu ove posledice neposredno dobijamo zaključak o neravnomernoj konvergenciji integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$ na $(1, \infty)$ (v. primer 1).

Navedimo sada neke dovoljne uslove ravnomerne konvergencije nesvojstvenog integrala.

Stav 7.2.1 *(Vajerštrasov kriterijum)*

Neka je $\varphi\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *integrabilna funkcija (tj. neka konvergira* $\int_a^b \varphi(x)\, dx$*), takva da je* $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ *za sve* $x \in [a, b)$, $y \in Y \subset \mathbf{R}$. *Tada integral* (1) *ravnomerno konvergira po* $y \in Y$.

Dokaz.

Iz konvergencije integrala $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$, takvo da za sve $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ važi $\int_{\beta'}^{\beta''} \varphi(x)\, dx < \varepsilon$. Tada je, za sve $y \in Y$,

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} |f(x, y)|\, dx \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} \varphi(x)\, dx < \varepsilon,$$

što na osnovu teoreme 1 znači da integral (1) ravnomerno konvergira na Y. ■

Primeri 7.2.2

1° Integral $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\, dx$ ravnomerno konvergira po $y \in \mathbf{R}$ jer je za svako $y \in \mathbf{R}$ ispunjeno $\left| \frac{\cos xy}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, a $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ konvergira.

2° Integral $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$ ima singularitete u $x = 0$ (za $\alpha < 1$) i u $x = 1$ (za $\beta < 1$). On konvergira ravnomerno po α za $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ (za fiksirano $\beta > 0$), kao i po β za $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ (za fiksirano $\alpha > 0$). Zaista, za $0 < x < 1$, $\beta > 0$ i $\alpha \geqslant \alpha_0$ je

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leqslant x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1},$$

a integral $\int_0^1 x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$ konvergira. Slično se dokazuje drugo tvrđenje. ▲

Vajerštrasovim kriterijumom ne može se dokazati ravnomerna konvergencija neapsolutno konvergentnog integrala. U takvim slučajevima možemo se poslužiti sledećim stavom.

Stav 7.2.2 *(Abel-Dirihleov kriterijum)*

Neka su funkcije $f(x, y)$, $g(x, y)$ *definisane za* $x \in [a, b)$ *i* $y \in Y \subset \mathbf{R}$ *i neka su za svako* $y \in Y$ *integrabilne po* x *na svakom segmentu* $[a, \beta] \subset [a, b)$. *Za ravnomernu konvergenciju nesvojstvenog integrala*

$$\int_a^b f(x, y) g(x, y)\, dx \tag{2}$$

po $y \in Y$ *dovoljno je da budu ispunjeni uslovi:*

(D_1*) za svako* $y \in Y$ *funkcija* $f(x, y)$ *je neprekidna po* $x \in [a, b)$ *i ima ravnomerno ograničenu primitivnu funkciju, tj. postoji konstanta* M, *takva da je* $\left| \int_a^\beta f(x, y)\, dx \right| \leqslant M$ *za sve* $y \in Y$ *i sve* $\beta \in [a, b)$;

(D_2*) za svako* $y \in Y$ *funkcija* $g(x, y)$ *je neprekidno diferencijabilna, monotona po* $x \in [a, b)$ *i* $g(x, y) \rightrightarrows 0$ $(x \to b)$ *po* $y \in Y$;

ili

(A_1*) za svako* $y \in Y$ *funkcija* $f(x, y)$ *je neprekidna po* $x \in [a, b)$ *i nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *ravnomerno konvergira po* $y \in Y$;

(A_2*) za svako* $y \in Y$ *funkcija* $g(x, y)$ *je neprekidno diferencijabilna i monotona po* $x \in [a, b)$; *takođe,* g *je ravnomerno ograničena po* $x \in [a, b)$ *i* $y \in Y$.

Dokaz.

Dokazaćemo da su uslovi (D_1) i (D_2) dovoljni za ravnomernu konvergenciju integrala (2). Slično se dokazuje i za uslove (A_1) i (A_2).

Neka su $\beta', \beta'' \in [a,b)$, $\beta' < \beta''$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu druge teoreme o srednjoj vrednosti integrala (teorema 8.4.2 iz M.A.I) važi

$$\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(\beta',y)\int_{\beta'}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(\beta'',y)\int_{\xi}^{\beta''} f(x,y)\,dx$$

za neko $\xi \in [\beta', \beta'']$. Na osnovu pretpostavke (D_1) integrali na desnoj strani ove jednakosti mogu se po apsolutnoj vrednosti ograničiti nekom konstantom K (uniformno po $y \in Y$). Iz pretpostavke (D_2) sledi da se može naći $\beta_0 \in [a,b)$, tako da ako je $\beta', \beta'' > \beta_0$ važi $|g(\beta',y)| < \varepsilon/(2K)$ i $|g(\beta'',y)| < \varepsilon/(2K)$, istovremeno za sve $y \in Y$. Iz prethodne jednakosti sledi da je za takve β', β'' ispunjeno $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$, što na osnovu teoreme 1 znači da je integral (2) ravnomerno konvergentan po $y \in Y$. ■

Primetimo da navedeni stav važi i pod nešto slabijim pretpostavkama — uslovi da je f neprekidna, a g glatka funkcija mogu se izostaviti.

Primeri 7.2.3

1° Integral $\int_a^\infty e^{-xy} f(x)\,dx$, $a \geqslant 0$, ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$ ako konvergira integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$, a funkcija f je neprekidna. To sledi jer su ispunjeni uslovi (A_1), (A_2) prethodnog stava. Na primer, integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$$

ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$.

2° Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y}\,dx$ ravnomerno konvergira po $y \geqslant y_0 > 0$, jer su ispunjeni uslovi (D_1), (D_2). Primetimo da, na osnovu posledice 1, on ne konvergira ravnomerno po $y > 0$, jer ne konvergira za $y = 0$.

3° Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$ konvergira za svako $y \in \mathbf{R}$. Na skupu $Y = \{y \in \mathbf{R} \mid |y| \geqslant c\}$, za neko $c > 0$, taj integral konvergira ravnomerno. Zaista, kako 0 nije singularitet tog integrala, možemo posmatrati samo njegovo ponašanje kad $x \to \infty$. No, tada tvrđenje lako sledi iz Dirihleovog kriterijuma.

Međutim, ovaj integral nije ravnomerno konvergentan na $\mathbf{R}$. Zaista, za $\beta > 0$ važi

$$\sup_{y\in\mathbf{R}} \left|\int_\beta^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| = \sup_{\alpha>0} \left|\int_\alpha^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \geqslant \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx > 0. \quad ▲$$

7.3. FUNKCIONALNA SVOJSTVA

Ispitivanje osobina funkcija definisanih nesvojstvenim parametarskim integralima po pravilu je komplikovanije od odgovarajućeg problema u slučaju svojstvenih integrala. Naime, kod nesvojstvenih integrala pojavljuje se još jedan (treći) granični prelaz o kojem treba voditi računa prilikom potrebne promene poretka. Da pravila data u odeljku 1 zaista više ne moraju da važe u ovakvoj situaciji, pokazaćemo sledećim primerom.

Primer 7.3.1

Za funkciju

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^3} e^{-y/(2x^2)}, & \text{ako je } x > 0, \\ 0, & \text{ako je } x = 0, \end{cases}$$

ispunjeno je, za svako $y > 0$ i x na intervalu $[0,\infty)$:

$$|f(x,y)| \leqslant f\left(\sqrt{\frac{y}{3}}, y\right) = 3\sqrt{\frac{3}{ye^3}} \to 0 = \varphi(x) \quad (y \to \infty),$$

što znači da $f(x,y) \rightrightarrows 0$ $(y \to \infty)$ po $x \in [0,\infty)$. Međutim, integral $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ ima vrednost 1 i, dakle, ne teži nuli (vrednosti integrala $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$) kad $y \to \infty$. ▲

Dodatni dovoljan uslov koji obezbeđuje zaključke slične onima iz odeljka 1 jeste ravnomerna konvergencija nesvojstvenog integrala.

Granična vrednost i neprekidnost

Teorema 7.3.1

Neka je funkcija $f(x,y)$, za svako y iz neke okoline V tačke $y_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, integrabilna po $x \in [a,\beta]$ za svako β za koje je $a < \beta < b$. Ako:

1° za svako takvo β važi $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ na $[a,\beta]$,

2° nesvojstveni integral $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergira na V,

tada $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ konvergira i važi

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Dokaz.

Označimo $F(\beta,y) = \int_a^\beta f(x,y)\,dx$. Iz pretpostavke 1° i stava 1.1 sledi da je $\lim_{y\to y_0} F(\beta,y) = \int_a^\beta \varphi(x)\,dx$. S druge strane, uslov 2° znači da $F(\beta,y) \rightrightarrows \int_a^b f(x,y)\,dx$ $(\beta \to b)$ po $y \in V$. Na osnovu opšte teoreme o promeni poretka graničnih prelaza (teorema 1.3.1) zaključujemo da postoji $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ i jednak je $\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx$. ■

Kao i kod svojstvenih integrala, provera uslova navedene teoreme nekad se može izvršiti korišćenjem Dinijevog kriterijuma.

Posledica 7.3.1

Neka je, za svako $y < y_0$ ($y > y_0$) iz neke okoline V tačke y_0, $f(x,y)$ nenegativna i neprekidna funkcija od $x \in [a,b)$ koja, kad y rastući (opadajući) teži y_0, rastući (po y) teži funkciji $\varphi(x)$, neprekidnoj na $[a,b)$. Ako integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ konvergira, tada važi jednakost (1).

Dokaz.

Monotonost konvergencije $f(x,y) \to \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ obezbeđuje, prema Dinijevom stavu, da je ta konvergencija ravnomerna na svakom segmentu $[a,\beta] \subset [a,b)$. S druge strane, nejednakost $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \varphi(x)$, koja važi za sve $x \in [a,b)$ i sve $y \in V$, i konvergencija integrala $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ povlače da $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergira po $y \in V$. Na taj način, ispunjeni su uslovi teoreme 1, pa važi jednakost (1). ■

Izvedena tvrđenja omogućavaju i neka jednostavna pravila o nesvojstvenoj integraciji redova član-po-član. (Podsećamo da su se odgovarajuća pravila izvedena u odeljku 1.3 odnosila samo na svojstvenu integraciju.)

Posledica 7.3.2

Neka su članovi reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ nenegativne i neprekidne funkcije na $[a,b)$ i neka je njegov zbir $f(x)$ na $[a,b)$ neprekidna i integrabilna funkcija. Tada se taj red može integrisati član-po-član na $[a,b)$, tj. važi

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Neposredna posledica teoreme 1 je i sledeća teorema o neprekidnosti funkcije definisane nesvojstvenim parametarskim integralom.

Teorema 7.3.2

Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b) \times [c,d]$ i neka je (nesvojstveni) integral $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergentan po $y \in [c,d]$. Tada je $I(y)$ neprekidna funkcija na $[c,d]$. ■

Primeri 7.3.2

1° Izračunajmo integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx,$$

razvijajući podintegralnu funkciju u stepeni red. Dodefinišimo tu funkciju njenim limesom -1 u tački $x = 0$. Za $0 \leqslant x < 1$ je tada

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Taj red ne konvergira ravnomerno na $[0,1)$ (jer ne konvergira za $x = 1$). Međutim, ispunjeni su uslovi posledice 2 (proveriti!), pa važi

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Kasnije ćemo pokazati (primer 8.3.1) da je zbir poslednjeg reda jednak $\pi^2/6$.

2° U primeru 2.3.1° dokazali smo da je integral

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$$

ravnomerno konvergentan po $y \in [0,\infty)$. Kako je njegova podintegralna funkcija (dodefinisana jedinicom za $x = 0$) neprekidna na $[0,\infty) \times [0,d]$, za sve $d > 0$, to na osnovu teoreme 2 zaključujemo da je i funkcija $I(y)$ neprekidna na $[0,d]$, dakle i na $[0,\infty)$. Specijalno, važi

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \lim_{y\to 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \quad \blacktriangle$$

Diferenciranje nesvojstvenog integrala

U sledećoj teoremi navodimo dovoljne uslove za mogućnost primene Lajbnicovog pravila na nesvojstvene parametarske integrale.

Teorema 7.3.3

Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° *funkcija $f\colon [a,b) \times [c,d] \to \mathbf{R}$ je neprekidna po $x \in [a,b)$ za svako $y \in [c,d]$, a funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ je neprekidna na $[a,b) \times [c,d]$;*

2° *integral $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ konvergira za neko $y = y_0 \in [c,d]$;*

3° *integral $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergira na $[c,d]$.*

Tada je funkcija $I(y)$ diferencijabilna na $[c,d]$ i važi

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Dokaz.

Kao i obično, označimo

$$F(\beta,y) = \int_a^{\beta} f(x,y)\,dx$$

za $a < \beta < b$. Uslovi 1°, na osnovu stava 1.3, obezbeđuju da funkcija F ima parcijalni izvod po y na $[c,d]$ i da važi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta,y) = \int_a^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Na osnovu 3° važi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y) \rightrightarrows \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \quad (\beta \to b) \quad \text{na } [c, d].$$

Najzad, iz 2° sledi da funkcija $F(\beta, y)$ ima za $y = y_0$ graničnu vrednost kad $\beta \to b$. Na taj način, ispunjeni su uslovi teoreme 1.3.4 o diferencijabilnosti granične funkcije familije diferencijabilnih funkcija, pa na osnovu nje zaključujemo da $F(\beta, y) \rightrightarrows I(y)$ $(\beta \to b)$ na $[c, d]$ i važi formula (2). ■

PRIMER 7.3.3

Kao primer primene prethodne teoreme izračunajmo *Dirihleov integral*

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx, \qquad y \in \mathbf{R}.$$

Neposredna primena Lajbnicovog pravila je nemoguća, jer bi se formalnim diferenciranjem dobio divergentan integral $\int_0^\infty \cos yx\, dx$. Posmatrajmo zato, za fiksirano $\alpha > 0$, parametarski integral

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} e^{-\alpha x}\, dx, \qquad y \geqslant 0.$$

Taj integral zadovoljava sve uslove teoreme 3: podintegralna funkcija je neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodom po y (kada se pogodno dodefiniše za $x = 0$), a integral dobijen diferenciranjem

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos yx\, dx = \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}$$

ravnomerno konvergira po $y \geqslant 0$, jer se majorira konvergentnim integralom $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$ koji ne zavisi od y.

Iz $I'(y) = \dfrac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}$ dobijamo $I(y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{\alpha} + C$. Zamenom $y = 0$ dobijamo $C = I(0) = 0$, pa je

$$I(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}, \qquad \alpha > 0. \tag{3}$$

Kao u primeru 2.2°, međutim, važi

$$\lim_{\alpha \to 0} I(y) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} e^{-\alpha x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = D(y),$$

pa iz (3) dobijamo $D(y) = \pi/2$ za $y > 0$. Kako je, očigledno, $D(0) = 0$ i $D(y)$ je neparna funkcija od y, to je konačno

$$D(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, \qquad y \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangle$$

Integracija nesvojstvenih integrala

Kod integracije funkcija definisanih nesvojstvenim parametarskim integralima razlikovaćemo slučajeve kada je taj novi integral svojstven, odnosno nesvojstven. U prvom slučaju, ako želimo da promenimo redosled integracije, moraćemo da vodimo računa o tri granična prelaza, a u drugom — o četiri.

TEOREMA 7.3.4

Ako važe pretpostavke teoreme 2, tj. ako je funkcija f neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$ i (nesvojstveni) integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ ravnomerno konvergira na $[c, d]$, onda je funkcija $I(y)$ integrabilna na $[c, d]$ i važi

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Dokaz.

Iz neprekidnosti funkcije f, na osnovu stava 1.5, sledi da za svako $\beta \in [a, b)$ važi

$$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x, y)\, dx = \int_a^\beta dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{5}$$

Kako familija funkcija $F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x, y)\, dx$, kad $\beta \to b$, konvergira integralu $\int_a^b f(x, y)\, dx$, ravnomerno po $y \in [c, d]$, to iz teoreme 1.3.3 sledi da leva strana jednakosti (5) teži $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$, kad $\beta \to b$. No, onda i desna strana ima graničnu vrednost kad $\beta \to b$ i ta granična vrednost je $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$. ■

Kao i u nekim situacijama koje smo ranije posmatrali, u slučaju nenegativnosti podintegralne funkcije Dinijev kriterijum omogućava da se uslovi prethodne teoreme oslabe.

POSLEDICA 7.3.3

Ako je f neprekidna i nenegativna realna funkcija na $[a, b) \times [c, d]$ i ako je $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ neprekidna funkcija na $[c, d]$, tada važi formula (4). ■

Kada je potrebno promeniti poredak dvaju nesvojstvenih integrala, uslovi koji to obezbeđuju se dalje komplikuju. Dokazaćemo ovde samo jedno tvrđenje koje se odnosi na slučaj nenegativne podintegralne funkcije.

TEOREMA 7.3.5

Neka je funkcija $f\colon [a, b) \times [c, d) \to \mathbf{R}$ neprekidna i nenegativna i neka oba (nesvojstvena) integrala

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad J(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{6}$$

definišu neprekidne funkcije (od $y \in [c, d)$, odnosno od $x \in [a, b)$). Tada važi jednakost

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{7}$$

pod pretpostavkom da bar jedan od tih uzastopnih integrala konvergira.

Dokaz.

Pretpostavimo, na primer, da konvergira integral na levoj strani relacije (7). Neka je $\beta \in [a,b)$. Tada iz posledice 3 dobijamo da je

$$\int_a^\beta dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx.$$

S druge strane, zbog $f(x,y) \geqslant 0$ je

$$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Iz poslednjih dveju relacija sledi da i integral na desnoj strani relacije (7) konvergira i da važi

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Na sličan način se dokazuje i obrnuta nejednakost. ■

Dokazana teorema ne važi bez pretpostavke o nenegativnosti funkcije f (v. dalje primer 4.3°). Navešćemo bez dokaza (v. npr. [25]) teoremu koja daje dovoljne uslove promene poretka integracije za funkcije promenljivog znaka.

Teorema 7.3.6

Ako važe sledeći uslovi:

1° *funkcija f je neprekidna na $[a,b) \times [c,d)$;*

2° *oba nesvojstvena integrala* (6) *ravnomerno konvergiraju, prvi po $y \in [c,\delta]$, za svako $\delta \in [c,d)$, a drugi po $x \in [a,\beta]$, za svako $\beta \in [a,b)$;*

3° *konvergira bar jedan od integrala*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x,y)|\,dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x,y)|\,dy,$$

tada važi formula (7). ■

Primeri 7.3.4

1° Neka je $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija, pri čemu je f' monotona funkcija i postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(+\infty)$. Dokazaćemo da tada za sve a, $b > 0$ važi sledeća formula:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = [f(+\infty) - f(0)] \ln\frac{b}{a}. \tag{8}$$

Zaista, neka je, na primer, $a < b$. Nije ograničenje opštosti ako pretpostavimo da je f' opadajuća i pozitivna funkcija. Integral $\int_0^\infty f'(yx)\,dx$ ravnomerno konvergira po $y \in [a,b]$, jer se $|f'(yx)|$ majorira sa $f'(ax)$, a integral $\int_0^\infty f'(ax)\,dx$ konvergira

(vrednost mu je $[f(+\infty) - f(0)]/a$). Zato se na integral $\int_a^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx$ može primeniti teorema 4, pa se dobija

$$[f(+\infty) - f(0)] \ln\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{y}\,dy = \int_a^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx$$
$$= \int_0^\infty dx \int_a^b f'(yx)\,dy = \int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx.$$

Kao specijalan slučaj formule (8) dobija se, na primer,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}, \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

2° Polazeći od Dirihleovog integrala

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad y > 0$$

(primer 3), koji ravnomerno konvergira na svakom segmentu $[a,b]$ za $0 < a < b$, dobijamo

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \int_0^\infty dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x}\,dy = \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a).$$

3° Direktnim računom se dobija da je za $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$:

$$\int_1^\infty dy \int_1^\infty f(x,y)\,dx = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_1^\infty dx \int_1^\infty f(x,y)\,dy.$$

Pri tom integrali

$$\int_1^\infty f(x,y)\,dx, \qquad \int_1^\infty f(x,y)\,dy$$

konvergiraju ravnomerno (prvi po $y \in [1,\infty)$, drugi po $x \in [1,\infty)$). Iz ovog primera zaključujemo sledeće: (a) uslovi kao u teoremi 4 nisu dovoljni da bi važila formula (4) u slučaju da su oba integrala u njoj nesvojstveni; (b) uslovi teoreme 5 nisu dovoljni da bi važila formula (7) ako podintegralna funkcija f nije stalnog znaka; (c) u datom slučaju nije ispunjen uslov 3° teoreme 6 (što se može i neposredno proveriti).

4° Primenom teoreme 6 izračunaćemo *Frenelove* integrale*

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Prvi od tih integrala se smenom $x^2 = t$ transformiše u

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

* A. J. Fresnel (1788–1827), francuski fizičar i matematičar

i konvergira prema Dirihleovom kriterijumu. (Primetimo da u polaznom integralu podintegralna funkcija ne teži nuli kad $x \to \infty$.) Koristeći poznati rezultat $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$ (primer 5.7.2), dobijamo da za $t > 0$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tu^2}du,$$

pa je

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t\,dt \int_0^\infty e^{-tu^2}du.$$

Direktna primena teoreme 6 na promenu redosleda dobijenih integrala nije moguća (zašto?). Zato ćemo, slično kao kod Dirihleovog integrala (primer 3) posmatrati, za neko fiksirano $\alpha > 0$, integral

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin t\,dt \int_0^\infty e^{-tu^2}du.$$

Sada su uslovi teoreme 6 ispunjeni, jer je $|e^{-\alpha t}e^{-tu^2}\sin t| \leqslant e^{-\alpha t}$ za sve $t > 0$, $u > 0$, a integral $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt$ konvergira. Tako dobijamo:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(\alpha+u^2)t} \sin t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}.$$

Kako integral $I(\alpha)$ ravnomerno konvergira po $\alpha \geqslant 0$ (na primer, na osnovu Dirihleovog kriterijuma), a dobijeni integral ravnomerno konvergira po $\alpha \geqslant 0$ (na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma), to prelaskom na limes kad $\alpha \to +0$ dobijamo

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \lim_{\alpha\to+0} I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Na sličan način se izvodi da i integral $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ ima istu vrednost. ▲

7.4. OJLEROVI INTEGRALI

Među najvažnije (neelementarne) funkcije koje se definišu nesvojstvenim parametarskim integralima spadaju *beta* i *gama-funkcija* koje se uvode *Ojlerovim integralima*:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{2}$$

U ovom odeljku, koristeći se ranije dokazanim svojstvima parametarskih integrala, izvešćemo neke osobine ovih funkcija.

Gama-funkcija

Integral (2) ima singularitete $x = \infty$ i (ako je $\alpha < 1$) $x = 0$. Što se prvog singulariteta tiče, jasno je da integral konvergira za svako $\alpha \in \mathbf{R}$. Kada $x \to +0$, međutim, važi $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$, pa zaključujemo da integral (2) konvergira ako i samo ako je $\alpha > 0$. Dakle, domen funkcije Γ je $(0,+\infty)$. Izvedimo sada neke njene najvažnije osobine.

1° Za svako $\alpha > 0$ važi

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{3}$$

Zaista, parcijalnom integracijom neposredno dobijamo

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Uzastopna primena dokazane formule (3) omogućava da se izračunavanje vrednosti funkcije Γ za $\alpha > 1$ svede na izračunavanje vrednosti $\Gamma(\alpha)$ za $0 < \alpha \leqslant 1$. Specijalno, za $\alpha = n \in \mathbf{N}$ dobijamo

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!, \tag{4}$$

s obzirom da je $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$. Na taj način, gama-funkcija se može shvatiti kao produženje faktorijela sa skupa prirodnih na skup pozitivnih realnih brojeva.

Druga posledica formule (3) je da pomoću nje možemo definisati $\Gamma(\alpha)$ i za neke negativne vrednosti argumenta. Naime, za $-1 < \alpha < 0$ možemo po definiciji staviti $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$. Nastavljajući ovaj postupak, funkcija Γ se definiše za sve realne vrednosti α, različite od 0 i od negativnih celih brojeva.

Pomenimo da se gama-funkcija definiše i za neke kompleksne vrednosti argumenta, ali mi se na tome nećemo zadržavati.

2° Dokažimo sada da je na svom (osnovnom) domenu $(0,+\infty)$ funkcija Γ beskonačno diferencijabilna.

Integral (2), kao ni integrali $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ ne konvergiraju ravnomerno na $(0,+\infty)$. No, napišimo (2) u obliku $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Za proizvoljno $\alpha_0 > 0$ izaberimo α_1, α_2 tako da je $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$. Za $\alpha \geqslant \alpha_1$ i $0 < x < 1$ je $|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| < x^{\alpha_1-1}|\ln^n x|$, pa kako $\int_0^1 x^{\alpha_1-1}|\ln^n x|\,dx$ konvergira, to $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ ravnomerno konvergira za $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$.

S druge strane, za $\alpha \leqslant \alpha_2$ i $x > 1$ je $|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| < x^{\alpha_2+n-1}e^{-x}$ (jer je $\ln x < x$), a $\int_1^\infty x^{\alpha_2+n-1}e^{-x}\,dx$ konvergira, pa $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ ravnomerno konvergira za $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$. Na taj način, važi

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Iz dokazane formule najpre zaključujemo da je $\Gamma''(\alpha) > 0$ za $\alpha > 0$, pa je funkcija $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ konveksna. Dalje, kako je $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, na osnovu

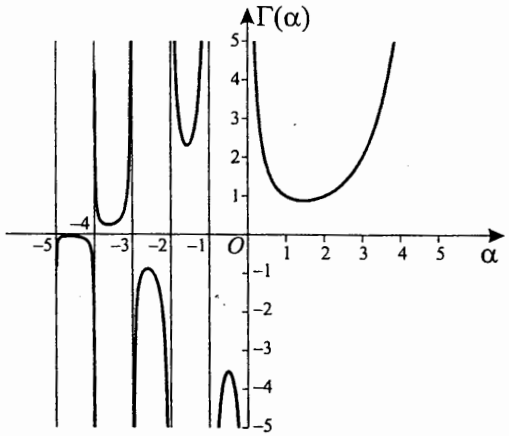
Rolove teoreme, postoji $\alpha_1 \in (1,2)$, takvo da je $\Gamma'(\alpha_1) = 0$. Zbog konveksnosti, ta nula je i jedina koju izvod $\Gamma'(\alpha)$ ima na intervalu $(0,+\infty)$. Dakle, funkcija Γ strogo opada na $(0,\alpha_1)$, a strogo raste na $(\alpha_1,+\infty)$. Može se izračunati

$$\alpha_1 \approx 1,4616, \qquad \min_{0<\alpha<+\infty} \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \approx 0,8856.$$

Primetimo još da iz (3) sledi da

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \to +\infty \quad (\alpha \to +0),$$

a iz $\Gamma(\alpha) > n!$ za $\alpha > n+1$ sledi da je $\lim_{\alpha\to+\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty$. Na taj način dolazimo do skice grafika funkcije Γ koji je prikazan na slici 1. Na toj slici dati su i delovi grafika gama-funkcije za negativne vrednosti argumenta, koji se dobijaju primenom formule (3).



Sl. 7.4.1

3° Osim što je funkcija $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ konveksna, ona je i *logaritamski konveksna*, tj. funkcija $\ln\Gamma$ je konveksna. Zaista, važi

$$(\ln\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2},$$

a primenjujući formulu (5) i Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo, za $\alpha > 0$,

$$[\Gamma'(\alpha)]^2 = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\,dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\ln x\right)dx\right)^2$$
$$< \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx\right) = \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha).$$

Dakle, za svako $\alpha > 0$ važi $[\ln\Gamma(\alpha)]'' > 0$.

4° Važi sledeća *Ojler-Gausova formula* za gama-funkciju

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}. \tag{6}$$

Dokažimo tu formulu najpre za $0 < \alpha \leqslant 1$. Neka je $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Tada je $n-1 < n < n+\alpha \leqslant n+1$, pa kako je funkcija $\ln\Gamma$ konveksna, dobijamo

$$\frac{\ln\Gamma(n)-\ln\Gamma(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln\Gamma(n+\alpha)-\ln\Gamma(n)}{(n+\alpha)-n} \leqslant \frac{\ln\Gamma(n+1)-\ln\Gamma(n)}{(n+1)-n},$$

tj. $\ln(n-1) \leqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!} \leqslant \ln n$. Odatle sledi

$$(n-1)^\alpha(n-1)! \leqslant \Gamma(n+\alpha) \leqslant n^\alpha(n-1)!,$$

odnosno, uzastopnom primenom formule (3),

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = \frac{(n-1)^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$
$$\leqslant \Gamma(\alpha) \leqslant \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}.$$

Na drugi način zapisano,

$$\Gamma(\alpha) \leqslant \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \leqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha \Gamma(\alpha),$$

odakle sledi jednakost (6) za $0 < \alpha \leqslant 1$. Za $\alpha > 1$ ona se dokazuje uzastopnom primenom jednakosti (3). (Na isti način se dokazuje i da formula (6) važi za svako realno α različito od nule i od negativnih celih brojeva.)

5° Jedna od važnih osobina gama-funkcije data je sledećom *formulom dopunjavanja*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

Da bismo dokazali ovu formulu, iskoristimo dokazanu Ojler-Gausovu jednakost (6) i sledeći prikaz sinusa u obliku beskonačnog proizvoda:

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^\infty \left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right), \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

koji ćemo izvesti kasnije (v. primer 8.4.2.3°). Dobijamo

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\alpha(n-\alpha)}\cdot\frac{1}{(1+\frac{\alpha}{1})\cdots(1+\frac{\alpha}{n-1})}\cdot\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{1})\cdots(1-\frac{\alpha}{n-1})}\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)} = \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^\infty\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Specijalno, iz formule (7) nalazimo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

odakle možemo ponovo dobiti poznatu vrednost Ojler-Poasonovog integrala

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

6° Na kraju, navedimo bez dokaza (v. npr. [27]) *Stirlingovu* formulu* koja opisuje asimptotsko ponašanje funkcije Γ (a samim tim i faktorijela) za velike vrednosti argumenta:

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\cdot\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha+\frac{\theta(\alpha)}{12\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

gde je $0 < \theta(\alpha) < 1$.

Beta-funkcija

Kao što smo videli u primeru 2.2.2°, integral (1) konvergira ako je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$. Dakle, funkcija $B(\alpha,\beta)$ definisana je za te vrednosti promenljivih. Iz istog primera i teoreme 3.2 sledi da je ona neprekidna po obe promenljive na svom domenu. Navodimo osnovna svojstva ove funkcije.

1° Funkcija B je simetrična, tj. za sve α, $\beta > 0$ važi

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).$$

Ova relacija dobija se smenom $x = 1 - t$ u integralu (1).

2° Za $\alpha > 1$ i $\beta > 0$ važi

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta). \tag{8}$$

Zaista, parcijalnom integracijom ($u = x^{\alpha-1}$, $dv = (1-x)^{\beta-1}\,dx$) se dobija

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right] \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

odakle sledi formula (8). Koristeći simetriju beta-funkcije dobijamo da za $\beta > 1$, $\alpha > 0$ važi

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1). \tag{9}$$

* J. Stirling (1692–1770), škotski matematičar

3° Smenom $x = \dfrac{t}{1+t}$ u integralu (1) dobijamo drugu integralnu reprezentaciju funkcije B,

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

4° Dokažimo sada da između funkcija B i Γ postoji veza

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{za } \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{10}$$

U tom cilju pretpostavimo najpre da je $\alpha > 1$ i $\beta > 1$ i napišimo proizvod $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ u obliku

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty z^{\beta-1}e^{-z}\,dz. \tag{11}$$

U integral $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty z^{\beta-1}e^{-z}\,dz$ uvedimo smenu $z = xy$, pa je

$$\Gamma(\beta) = x^\beta\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-xy}\,dy.$$

Tada se dobija $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty dx\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy$. Da bismo u poslednjem integralu mogli da promenimo redosled integracije, proverimo da li su ispunjeni uslovi teoreme 3.5. Funkcija

$$f(x,y) = x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}$$

je neprekidna i nenegativna na $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. Integrali

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dx = \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta),$$
$$\int_0^\infty f(x,y)\,dy = x^{\alpha-1}e^{-x}\Gamma(\beta)$$

definišu neprekidne funkcije od $y \in [0,+\infty)$, odnosno $x \in [0,+\infty)$, a iz (11) sledi da postoji uzastopni integral $\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)\,dy$. Dakle, važi

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)\,dx = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

za $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Da bismo dokazali da ta formula važi i za sve α, $\beta > 0$, dovoljno je da primenimo formule (3), (8) i (9).

Kao posledicu dokazane formule (10) možemo još neka svojstva funkcije B izvesti iz odgovarajućih svojstava funkcije Γ. Na primer, iz osobine (4) dobija se

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad m,\ n \in \mathbf{N},$$

a iz (7),

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Specijalno, $B(1/2, 1/2) = \pi$.

Neke primene dokazanih rezultata o beta i gama-funkciji daćemo u primerima, a još neke su navedene u zadacima.

Primeri 7.4.1

1° Za α, $\beta > -1$, smenom $\sin^2 x = t$, dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\alpha-1)/2}(1-t)^{(\beta-1)/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

2° Koristeći prethodni rezultat možemo lako izračunati meru n-dimenzione kugle poluprečnika R (v. primer 5.5.2.4°)

$$\mu K^n = \frac{2\pi R^n}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2}$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot\Gamma^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n}\cdot\frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^n.$$

3° Izračunajmo vrednost *Rabeovog integrala*

$$I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx.$$

Smenom $1-x=t$ dobijamo $I = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\, dx$, pa je

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [\ln\pi - \ln\sin\pi x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Pri tom smo koristili poznati rezultat $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ (v. zadatak 8.15 iz M.A.I). ▲

ZADACI

1. Ako je $f(x,y) = \frac{1}{y}(1-x^{1/y})x^{1/y}$, $x \in [1/2, 1]$, $y \in (0,1]$, dokazati da je

$$\lim_{y\to+0}\int_{1/2}^1 f(x,y)\, dx \neq \int_{1/2}^1 \left(\lim_{y\to+0} f(x,y)\right) dx.$$

2. Dokazati da funkcija $y(x) = \int_0^{\pi/2}\cos(n\varphi - x\sin n\varphi)\, d\varphi$ za $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ i $x \in \mathbf{R}$ zadovoljava Beselovu diferencijalnu jednačinu $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$ (v. i zadatak 1.12).

3. 1° Dokazati da za eliptičke integrale $E(k)$ i $F(k)$ (v. zadatak 1.15) važi:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}, \qquad \frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}.$$

2° Ako se uvedu oznake $k' = \sqrt{1-k^2}$, $E'(k) = E(k')$, $F'(k) = F(k')$, dokazati da važi Ležandrov identitet:

$$EF' + E'F - FF' = \frac{\pi}{2}.$$

3° Dokazati da je

$$\int_0^1 F(k)\, dk = \int_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}\, dt.$$

4. Ako je $F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)\, dt$, gde $n \in \mathbf{N}$, a funkcija f je neprekidna na intervalu integracije, dokazati da je $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

5. Dokazati da je

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x + r^2)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |r| \leqslant 1, \\ 2\pi\ln|r|, & \text{ako je } |r| > 1. \end{cases}$$

6. Ako je $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0) = 0$, dokazati da je

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\, dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

7. Dokazati da je integral $I(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\, dx$ prekidne funkcije $\operatorname{sgn}(x-y)$ neprekidna funkcija od $y \in \mathbf{R}$.

8. 1° Ako je $\varphi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,dx$ $(a > 0)$, dokazati da funkcija φ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\varphi''(y) - a^2\varphi(y) = -\pi/2$ i izvesti odatle da je $\varphi(y) = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ay})$ za $y > 0$.

2° Dokazati da sledeći *Laplasovi integrali* imaju navedene vrednosti:

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ay}, \quad \int_0^\infty \frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ay}, \quad a, y > 0.$$

9. Dokazati da za $a_n(x) = ae^{-anx} - be^{-bnx}$ $(0 < a < b)$ važi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty a_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\right)dx.$$

10. *Laplasovom transformacijom* funkcije $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ naziva se funkcija

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt, \qquad p > 0,$$

ako taj integral konvergira. Naći Laplasove transformacije sledećih funkcija: 1° $f(t) = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$; 2° $f(t) = \sqrt{t}$; 3° $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$, $f(0) = 1$; 4° $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

11. Na primeru funkcije $f(x,y) = (2-xy)xye^{-xy}$, $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,1]$, pokazati da formula teoreme 3.4 ne mora da važi za funkciju promenljivog znaka ako se izostavi pretpostavka o ravnomernoj konvergenciji odgovarajućeg nesvojstvenog integrala.

12. Koristeći poznatu vrednost integrala $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ dokazati da je

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-y^2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2xy\,dx = e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt, \quad y \in \mathbf{R}.$$

13. 1° Koristeći poznatu vrednost Dirihleovog integrala (primer 3.3) dokazati da tzv. *prekidni Dirihleov množitelj* ima vrednost $(\alpha, \beta > 0)$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{za } \beta < \alpha, \\ \pi/4, & \text{za } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{za } \beta > \alpha. \end{cases}$$

2° Pomoću prethodnog rezultata, menjajući redosled integracije u izrazu

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x}\,dx \int_0^\infty e^{-t}\sin xt\,dt,$$

naći vrednosti Laplasovih integrala iz zadatka 8.2° za $a = 1$.

14. Dokazati *Ležandrovu formulu*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha), \quad \alpha > 0.$$

15. Koristeći formulu

$$\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}\,dy, \quad x > 0,\ \alpha > 0,$$

dokazati da je, za $a \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}$$

(u prvom slučaju je $0 < \alpha < 1$, a u drugom $0 < \alpha < 2$).

16. Razvijajući u red podintegralnu funkciju, dokazati da je za $\alpha > 1$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha),$$

gde je ζ Rimanova zeta-funkcija (primer 1.3.4).

17. Za hipergeometrijski red (v. zadatak 1.11) dokazati *Gausovu formulu*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

za one vrednosti α, β, γ za koje je desna strana te jednakosti definisana.

18. Koristeći formulu $\prod_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (koja se može izvesti, na primer, pomoću kompleksnih brojeva) i formulu dopunjavanja za gama-funkciju, dokazati da je

$$\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}.$$

19. Dokazati *Vajerštrasovu formulu*

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}e^{-C\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha/n}}{1+\frac{\alpha}{n}}, \quad \alpha > 0,$$

gde je C Ojlerova konstanta (v. zadatak 4.10 iz M.A.I).

20. Za funkcije klase $C^2(I)$, gde je I interval na $\mathbf{R}$, dokazati:

(a) zbir i proizvod logaritamski konveksnih funkcija na I su logaritamski konveksne funkcije na I;

(b) pozitivan tačka-po-tačka limes logaritamski konveksnih funkcija na I je logaritamski konveksna funkcija na I.

21. Neka funkcija $f\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ zadovoljava uslove:

1° $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$ za $\alpha > 0$,

2° f je logaritamski konveksna na $(0,+\infty)$,

3° $f(1) = 1$.

Tada je $f(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha)$ za $\alpha \in (0,+\infty)$. Dokazati.

22. 1° Dokazati da je beta-funkcija beskonačno diferencijabilna (po oba argumenta) u svojoj oblasti definisanosti. Na primer,

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\,dx.$$

2° Koristeći beta-funkciju izvesti formule

$$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(a+bx^q)^r} = \frac{1}{q}a^{r+\frac{p+1}{q}}b^{-\frac{p+1}{q}}B\left(\frac{p+1}{q}, r-\frac{p+1}{q}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\right), \quad 0<\alpha<1.$$

23. Izvesti formulu (10) odeljka 4 uvodeći u dvojnom integralu

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x-y}x^{\beta-1}y^{\alpha-1}\,dx\,dy$$

smenu $x = u(1-v)$, $y = uv$.

24. Izračunati Dirihleov integral

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz \qquad (p,q,r,s>0),$$

gde je $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$.

25. Dokazati da je

$$\iint_P \cos(xu+yv)\,du\,dv = \frac{2\pi J_1(r)}{r},$$

gde je $P = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leqslant 1\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, a J_1 je Beselova funkcija $J_1(r) = \frac{r}{\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2}\cos rt\,dt$, zadatak 1.12.

8. FURIJEOVI REDOVI

U ovoj glavi proučićemo jedan od najvažnijih tipova funkcionalnih redova — trigonometrijske Furijeove* redove. Neke osobine tih redova se jednostavnije izvode ako se oni posmatraju kao specijalan slučaj opštih Furijeovih redova u prostorima sa skalarnim proizvodom, pa ćemo zato najpre govoriti o takvim prostorima. Tako postavljena, ova teorija predstavlja i uopštenje teorije konačnodimenzionih euklidskih prostora i problema razlaganja vektora po bazi na beskonačnodimenzioni slučaj. Poslednji odeljak ove glave biće posvećen kontinualnom analogonu Furijeovog reda — Furijeovom integralu.

8.1 HILBERTOV PROSTOR

Kao što znamo, konačnodimenzioni euklidski prostor $\mathbf{R}^k$ je vektorski prostor u kome se norma, pa samim tim i metrika, uvodi pomoću skalarnog proizvoda (v. primer 9.1.1 iz M.A.I). Taj skalarni proizvod ima određena svojstva koja mogu da posluže kao inspiracija za aksiomatsko uvođenje odgovarajuće operacije u proizvoljnom vektorskom prostoru. U ovoj knjizi zadržaćemo se samo na slučaju realnog vektorskog prostora.

Definicija 8.1.1

Neka je X realan vektorski prostor. Za funkciju koja svakom paru (x,y) elemenata iz X dodeljuje realan broj $x\cdot y$ kažemo da je *skalarni proizvod* na X ako za sve $x, y, z \in X$ i $\lambda \in \mathbf{R}$ važi:

1° $x\cdot y = y\cdot x$;

2° $\lambda x\cdot y = \lambda(x\cdot y)$;

3° $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$;

4° $x\cdot x \geqslant 0$;

5° $x\cdot x = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

* J. B. J. Fourier (1768–1830), francuski matematičar

Među najvažnije osobine svakog skalarnog proizvoda spadaju Koši-Švarcova nejednakost

$$(x \cdot y)^2 \leqslant (x \cdot x)(y \cdot y) \tag{1}$$

i nejednakost Minkovskog

$$\sqrt{(x+y)\cdot(x+y)} \leqslant \sqrt{x \cdot x} + \sqrt{y \cdot y}. \tag{2}$$

Za dokaz relacije (1), primetimo da za svako $\lambda \in \mathbf{R}$ važi

$$0 \leqslant (x+\lambda y)\cdot(x+\lambda y) = (x \cdot x) + 2\lambda(x \cdot y) + \lambda^2(y \cdot y),$$

pa je diskriminanta poslednjeg kvadratnog trinoma po λ nepozitivna. Nejednakost (2) sledi iz (1), jer je

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x+y) &= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\ &\leqslant x \cdot x + 2\sqrt{(x \cdot x)(y \cdot y)} + y \cdot y = (\sqrt{x \cdot x} + \sqrt{y \cdot y})^2.\end{aligned}$$

Dokazane činjenice omogućavaju da se u svakom prostoru X sa skalarnim proizvodom uvede norma pomoću $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ za $x \in X$, koja ima sledeće osobine:

1° $\|x\| \geqslant 0$ za $x \in X$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$;

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ za $x \in X$ i $\lambda \in \mathbf{R}$;

3° $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ za $x, y \in X$.

Samim tim, svaki prostor sa skalarnim proizvodom je jedan metrički prostor. Rastojanje u njemu se uvodi pomoću

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}.$$

Definicija 8.1.2

Vektorski prostor u kome je definisan skalarni proizvod naziva se (realnim) *pred-Hilbertovim* prostorom.* Ako je on kompletan u odnosu na metriku koja je definisana pomoću skalarnog proizvoda, nazivamo ga *Hilbertovim prostorom.*

Primeri 8.1.1

1° $\mathbf{R}^k$ je (konačnodimenzioni) Hilbertov prostor. Njegova kompletnost je dokazana u primeru 9.3.2 iz M.A.I.

2° U vektorskom prostoru l^2 svih realnih nizova $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, takvih da $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergira, uvedimo skalarni proizvod pomoću

$$x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{za } x = (x_n),\ y = (y_n) \in l^2.$$

* D. Hilbert (1862–1943), nemački matematičar

Primetimo da iz $x, y \in l^2$ sledi da taj red (apsolutno) konvergira, jer je $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ za $n \in \mathbf{N}$. Osobine skalarnog proizvoda proveravaju se neposredno. Za dokaz kompletnosti prostora l^2 videti npr. [1].

3° Podsetimo se da za funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ kažemo da je deo-po-deo neprekidna ako postoji konačno mnogo tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ segmenta $[a,b]$, tako da je f neprekidna na svakom od intervala (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$, a u krajevima tih intervala ima desne, odnosno leve limese (tj. ima najviše konačno mnogo tačaka prekida i one su prve vrste). Označimo sa $C_0[a,b]$ vektorski prostor svih deo-po-deo neprekidnih funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ koje imaju i osobinu da u svakoj tački x zadovoljavaju jednakost

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Operacije vektorskog prostora definišu se na standardan način. U taj prostor uvedimo skalarni proizvod pomoću

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad \text{za } f, g \in C_0[a,b]. \tag{3}$$

Osobine 1°–4° iz definicije 1 se lako proveravaju. Da bismo dokazali osobinu 5° skalarnog proizvoda, pretpostavimo da je funkcija $f \in C_0[a,b]$ takva da je $f \cdot f = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0$. Neka su $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tačke prekida funkcije f. Tada je i $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Posmatrajmo funkciju $f_i\colon [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$ datu sa

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f(x_{i-1}+0), & \text{za } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0), & \text{za } x = x_i. \end{cases}$$

Ta funkcija je neprekidna i važi $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i^2(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0$, pa je $f_i(x) \equiv 0$ za $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Znači, važi i $f(x_{i-1}+0) = f(x_i - 0) = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Iz uslova $f \in C_0[a,b]$ onda sledi da je $f(x) = 0$ za $x \in [a,b]$.

Može se pokazati da pred-Hilbertov prostor $C_0[a,b]$ nije kompletan.

Metrika

$$d(f,g) = \left\{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}, \qquad f, g \in C_0[a,b],$$

koju indukuje skalarni proizvod (3) zove se još i *metrika srednjeg kvadratnog odstupanja.* Ako niz funkcija $f_n \in C_0[a,b]$ konvergira u smislu te metrike funkciji $f \in C_0[a,b]$, kažemo da f_n teži f *u srednjem.* ▲

Stav 8.1.1

Skalarni prozvod je neprekidna funkcija po obe promenljive u sledećem smislu: ako za nizove (x_n), (y_n) vektora iz pred-Hilbertovog prostora X važi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, onda je $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$.

Dokaz.

Važi

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leqslant |(x_n - x) \cdot y_n| + |x \cdot (y_n - y)| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|.$$

Kad $n \to \infty$, imamo $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$, a $(\|y_n\|)$ je ograničen niz realnih brojeva, jer niz vektora (y_n) konvergira. Odatle sledi da izraz $x_n \cdot y_n - x \cdot y$ teži nuli. ■

Prednost pred-Hilbertovih prostora nad proizvoljnim normiranim prostorima je u tome što se u njima može definisati ugao između vektora. Specijalno, uvodi se

Definicija 8.1.3

Za vektore x, y pred-Hilbertovog prostora X kaže se da su *ortogonalni* ako važi $x \cdot y = 0$.

Navodimo sledeće jednostavno svojstvo ortogonalnih vektora.

Stav 8.1.2 *(Pitagorina teorema)*
Ako su vektori x i y ortogonalni, onda je $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dokaz.

Iz $x \cdot y = 0$ sledi

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = (x \cdot x) + 2(x \cdot y) + (y \cdot y) = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

8.2. ORTONORMIRANI SISTEMI I FURIJEOVI REDOVI

Definicija 8.2.1

Za sistem vektora $\{ e_i \mid i \in I \}$ (I je proizvoljan skup indeksa) pred-Hilbertovog prostora X kažemo da je *ortonormiran* ako je

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j, \\ 0, & \text{za } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j \in I).$$

Primetimo odmah da su vektori ortonormiranog sistema uvek međusobno linearno nezavisni. Zaista, ako bi neki konačan podskup $\{e_1, \dots, e_n\}$ datog ortonormiranog sistema bio linearno zavisan, postojali bi skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, od kojih bar jedan (npr. λ_i) nije jednak nuli, takvi da je $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. Skalarnim množenjem sa e_i sledilo bi tada $\lambda_i = 0$, suprotno učinjenoj pretpostavci.

Primeri 8.2.1

1° U prostoru $\mathbf{R}^k$ vektori $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_k = (0, 0, \dots, 1)$ čine jedan ortonormiran sistem.

2° Uočimo vektore

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \quad e_3 = (0, 0, 1, \dots), \quad \dots$$

Hilbertovog prostora l^2. Neposredno se proverava da je niz vektora $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ortonormiran.

3° U prostoru $C_0[-\pi, \pi]$ deo-po-deo neprekidnih funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$ posmatrajmo *trigonometrijski sistem funkcija*

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots .$$

Ortonormiranost tog niza funkcija sledi iz jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{za } m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad \text{za } m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \, n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n \neq 0, \end{cases}$$

koje se neposredno proveravaju.

4° Na sličan način se dokazuje da je u prostoru $C_0[-l, l]$ ($l > 0$) ortonormiran sledeći niz funkcija

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots .$$

5° Polinomi koji se definišu pomoću

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2 - 1)^n]}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

nazivaju se *Ležandrovim polinomima*. Na primer,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad \dots .$$

Dokažimo da je sistem $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ Ležandrovih polinoma ortogonalan (ali ne i ortonormiran) u prostoru $C_0[-1, 1]$. U tom cilju dovoljno je dokazati da je svaki polinom $P_n(x)$ ortogonalan na polinome $1, x, \dots, x^{n-1}$, čijim linearnim kombinacijama se dobijaju polinomi $P_k(x)$ za $k < n$. Parcijalnom integracijom se za $k < n$ dobija

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) \, dx = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{k+1} x^k}{dx^{k+1}} \frac{d^{n-k-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-k-1}} \, dx = 0.$$

Lako se izvodi da je $\|P_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$, pa je sistem polinoma $\tilde{P}_n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, gde je $\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} P_n(x)$, ortonormiran u prostoru $C_0[-1, 1]$. ▲

Neka je $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormiran skup vektora (ortonormirana baza) konačnodimenzionog prostora $\mathbf{R}^k$. Iz linearne algebre je poznato da se svaki vektor $x \in \mathbf{R}^k$ može na jedinstven način prikazati u obliku $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, pri čemu su koeficijenti α_i određeni sa $\alpha_i = x \cdot e_i$. Da li slični zaključci važe i za beskonačnodimenzione prostore? Uvedimo sledeće osnovne pojmove.

Definicija 8.2.2

Neka je X beskonačnodimenzioni pred-Hilbertov prostor i

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \tag{2}$$

ortonormiran niz vektora u njemu. Za brojeve $\alpha_n = x \cdot e_n$, $n \in \mathbf{N}$, kažemo da su *Furijeovi koeficijenti* vektora $x \in X$ u odnosu na niz (2), a za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n$$

da je *Furijeov red* tog vektora u odnosu na niz (2).

Navedimo nekoliko opštih svojstava Furijeovih koeficijenata i Furijeovih redova.

Stav 8.2.1

Neka je $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormiran niz vektora u pred-Hilbertovom prostoru X i $x \in X$. Tada za dato $n \in \mathbf{N}$ i svaki vektor oblika $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ važi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $\lambda_i = x \cdot e_i$, $i = 1, \dots, n$. Drugim rečima, od svih linearnih kombinacija $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, vektor x najbolje aproksimira ona koja je ujedno n-ta parcijalna suma Furijeovog reda tog vektora u odnosu na sistem $\{e_1, e_2, \dots\}$.

Dokaz.

Kvadrat norme vektora $x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ može se proceniti na sledeći način

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \cdot \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x \cdot e_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - x \cdot e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 \\ &\geqslant \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2, \end{aligned}$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $\lambda_i = x \cdot e_i$ za $i = 1, \dots, n$. ■

Stav 8.2.2 *(Beselova nejednakost)*

Neka je $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormiran niz vektora u pred-Hilbertovom prostoru X i $x \in X$. Tada važi

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot e_i)^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{3}$$

Dokaz.

Iz dokaza prethodnog stava, stavljajući $\lambda_i = x \cdot e_i$ za $i = 1, \dots, n$, dobijamo da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2, \tag{4}$$

odakle sledi $\sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$. Dakle, red (sa pozitivnim članovima) na levoj strani nejednakosti (3) konvergira i suma mu nije veća od $\|x\|^2$. ■

Posledica 8.2.1

Niz Furijeovih koeficijenata $(x \cdot e_n)$ svakog vektora po proizvoljnom ortonormiranom nizu teži nuli. ■

Primer 8.2.2

Interpretirajmo rezultate stavova 1 i 2 na primeru trigonometrijskog sistema (1) u prostoru $C_0[-\pi, \pi]$. Furijeovi koeficijenti funkcije $f \in C_0[-\pi, \pi]$ u odnosu na taj sistem dati su sa

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx,$$
$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Uobičajeno je, međutim, da se umesto njih posmatraju koeficijenti $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_0$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, tj.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

koje ćemo u daljem zvati trigonometrijskim Furijeovim koeficijentima funkcije f. Furijeov red te funkcije onda glasi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6}$$

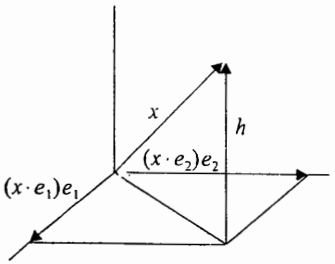
i zove se trigonometrijski Furijeov red funkcije f.

Stav 1 u ovom slučaju može se iskazati na sledeći način: od svih trigonometrijskih polinoma n-tog reda (tj. zbirova oblika $A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$), najbolje aproksimira funkciju f (u smislu srednjeg kvadratnog odstupanja) n-ta parcijalna suma trigonometrijskog Furijeovog reda (6) te funkcije.

Beselova nejednakost (3) glasi

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \quad \blacktriangle$$

Geometrijski, stavovi 1 i 2 mogu se prikazati na slici 1. Brojevi $x \cdot e_i$, $i = 1, \ldots, n$ (na slici je uzeto $n = 2$) predstavljaju algebarske vrednosti projekcija vektora x na koordinatne ose, a vektor $\sum_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)e_i$ je projekcija vektora x na ravan određenu vektorima e_1, $\ldots$, e_n. On je, od svih vektora te ravni, najbolja aproksimacija vektora x, tj. od svih vektora oblika $x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ vektor $h = x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)e_i$ (koji je normalan na toj ravni) ima najmanju normu. Ta norma se izražava relacijom (4): $\|h\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)^2$ i jednaka je nuli ako i samo ako vektor x pripada pomenutoj ravni. U tom slučaju važi $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)^2$, što je na drugi način zapisana Pitagorina teorema.



Sl. 8.2.1

Potpuni ortonormirani sistemi

Neka od osnovnih pitanja koja se mogu postaviti za svaki ortonormirani niz $\{e_1, e_2, \ldots\}$ u pred-Hilbertovom prostoru su:

1° Da li se svaki vektor $x \in X$ može proizvoljno dobro aproksimirati linearnim kombinacijama elemenata datog sistema?

2° Da li se svaki vektor $x \in X$ može prikazati kao suma svog Furijeovog reda, tj. da li važi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n\,?$$

3° Da li za svaki vektor $x \in X$ u Beselovoj nejednakosti (3) važi jednakost?

4° Da li je 0 jedini vektor u X čiji su svi Furijeovi koeficijenti jednaki nuli, tj. da li je 0 jedini vektor koji je ortogonalan na sve vektore datog ortonormiranog sistema?

Lako je pokazati da sva navedena pitanja u opštem slučaju imaju odrečan odgovor. Štaviše, to je tako i u konačnodimenzionom slučaju ako ortonormirani sistem ima manje vektora nego što je dimenzija prostora. Na primer, skup $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)\}$ vektora iz $\mathbf{R}^3$ jeste ortonormiran, ali ne zadovoljava nijedan od uslova 1°–4°.

Vezu između uslova 1°–4° daje sledeća osnovna

Teorema 8.2.1

(a) Za ortonormirani niz $\{e_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ *u pred-Hilbertovom prostoru* X *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1° *Za svako* $x \in X$ *i svako* $\varepsilon > 0$ *postoje skalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *takvi da je* $\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\| < \varepsilon$.

2° *Za svako* $x \in X$ *važi* $\sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n = x$ *(konvergencija reda u smislu metrike prostora* X*).*

3° *Za svako* $x \in X$ *važi* $\sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)^2 = \|x\|^2$ *(Parsevalova* jednakost).*

(b) Bilo koji od uslova 1°–3° *povlači da važi*

4° *Ako je vektor* $x \in X$ *takav da je* $x \perp e_n$ *za sve* $n \in \mathbf{N}$, *onda je* $x = 0$.

Ako je prostor X *Hilbertov (dakle, kompletan), onda su uslovi* 1°–4° *međusobno ekvivalentni.*

Dokaz.

Dokazaćemo implikacije 1° $\Rightarrow$ 2°, 2° $\Rightarrow$ 3°, 3° $\Rightarrow$ 1°, 3° $\Rightarrow$ 4° i (u slučaju kompletnosti prostora X) 4° $\Rightarrow$ 2°.

1° $\Rightarrow$ 2°. Ako važi 1°, za dato $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ izaberimo brojeve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tako da važi $\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\| < \varepsilon$. Na osnovu ekstremalnog svojstva Furijeovih koeficijenata (stav 1), važi

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)e_i\right\| \leqslant \left\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\| < \varepsilon,$$

što znači da red $\sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n$ konvergira i ima sumu x.

2° $\Rightarrow$ 3°. Zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda (stav 1.1) i ortonormiranosti datog sistema, iz 2° sledi da za svako $x \in X$ važi

$$\|x\|^2 = x \cdot x = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n\right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)^2.$$

* M. A. Parseval (1755–1836), francuski matematičar

$3° \Rightarrow 1°$. Iz jednakosti (4) i uslova 3° dobijamo da je za svako $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x\cdot e_i)e_i\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}(x\cdot e_i)^2\right)=0,$$

što znači da se vektor x može proizvoljno dobro aproksimirati linearnim kombinacijama oblika $\sum_{i=1}^{n}(x\cdot e_i)e_i$.

$3° \Rightarrow 4°$. Ako je $x \in X$ takav vektor da je $x \cdot e_n = 0$ za $n \in \mathbf{N}$, onda iz 3° sledi $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot e_n)^2 = 0$, tj. $x = 0$.

$4° \Rightarrow 2°$. Dokažimo najpre da ako je prostor X kompletan, onda Furijeov red svakog vektora $x \in X$ konvergira.

Zaista, ako sa $s_n = \sum_{i=1}^{n}(x\cdot e_i)e_i$ označimo parcijalnu sumu toga reda, imamo za $m > n$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left[\sum_{i=n+1}^{m}(x\cdot e_i)e_i\right]\cdot\left[\sum_{i=n+1}^{m}(x\cdot e_i)e_i\right]=\sum_{i=n+1}^{m}(x\cdot e_i)^2.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot e_n)^2$, međutim, jeste konvergentan numerički red (stav 2), pa iz prethodnog sledi da je niz (s_n) Košijev, dakle konvergentan u X.

Označimo $y = \sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot e_n)e_n$ i $z = x - y$. Zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda imamo da je za svako $i \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} z\cdot e_i &= x\cdot e_i - y\cdot e_i = x\cdot e_i - \left[\sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot e_n)e_n\right]\cdot e_i \\ &= x\cdot e_i - x\cdot e_i = 0. \end{aligned}$$

Ako važi uslov 4°, odatle sledi da je $z = 0$, tj. $x = y = \sum_{n=1}^{\infty}(x\cdot e_n)e_n$. ■

Primetimo da u slučaju nekompletnog pred-Hilbertovog prostora uslov 4° ne mora da povlači uslove 1°–3° (za odgovarajući primer v. zadatak 5).

Definicija 8.2.3

Za ortonormiran niz $\{e_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ u pred-Hilbertovom prostoru X koji zadovoljava bilo koji od uslova 1°–3° prethodne teoreme kažemo da je *potpun* ili da predstavlja *ortonormiranu bazu* u X.

Primer 8.2.3

Sistem jediničnih vektora $e_1, e_2, \ldots$ prostora l^2 (primer 1.2°) je ortonormirana baza tog prostora. Bilo koji od uslova 1°–4° može se jednostavno proveriti. ▲

O, za nas najvažnijem, pitanju potpunosti trigonometrijskog sistema u $C_0[-\pi,\pi]$ govorićemo u narednom odeljku.

8.3. POTPUNOST TRIGONOMETRIJSKOG SISTEMA

Vajerštrasova teorema 1.5.1 tvrdi da se svaka realna funkcija, neprekidna na odsečku $[a,b]$, može proizvoljno dobro (ravnomerno na $[a,b]$) aproksimirati algebarskim polinomima. Kada su u pitanju periodične neprekidne funkcije $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ perioda 2π ili, što je očigledno ekvivalentno, funkcije f prostora $C[-\pi,\pi]$ za koje važi $f(-\pi) = f(\pi)$, može se izvršiti ravnomerna aproksimacija trigonometrijskim polinomima, tj. sumama oblika $A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$. To tvrdi sledeća teorema, koja se obično naziva *drugom Vajerštrasovom teoremom.*

Teorema 8.3.1

Za svaku neprekidnu funkciju $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ perioda 2π i za svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom t, takav da je $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in \mathbf{R}$.

Dokaz.

Jasno je da je datu nejednakost dovoljno dokazati za $x \in [-\pi,\pi]$.

Pretpostavimo najpre da je funkcija f parna. Posmatrajmo funkciju $g(u) = f(\arccos u)$, $u \in [-1,1]$. Očigledno je $g \in C[-1,1]$, pa na osnovu teoreme 1.5.1 sledi da postoji algebarski polinom p, takav da je $|f(\arccos u) - p(u)| < \varepsilon$ za sve $u \in [-1,1]$. Drugim rečima, važi

$$|f(x) - p(\cos x)| < \varepsilon \quad \text{za } x \in [0,\pi].$$

No, zbog parnosti funkcija $f(x)$ i $\cos x$, ta nejednakost važi i za $x \in [-\pi,0]$. Kako je $t(x) \coloneqq p(\cos x)$ trigonometrijski polinom (proveriti!), to je tvrđenje teoreme za parnu funkciju f dokazano.

Pretpostavimo sada da je $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ proizvoljna neprekidna funkcija perioda 2π. Napišimo je u obliku

$$f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x. \tag{1}$$

Prvi od dobijenih sabiraka možemo predstaviti kao

$$f(x)\sin^2(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}\sin^2 x + \left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x\right)\sin x. \tag{2}$$

Kako su funkcije $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ i $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x$ neprekidne, periodične (sa periodom 2π) i parne, to na osnovu prvog dela dokaza postoje trigonometrijski polinomi t_1 i t_2, takvi da je

$$\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2} - t_1(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left|\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x - t_2(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

za sve $x \in [-\pi,\pi]$. No, onda iz (2), stavljajući $t_3(x) = t_1(x)\sin^2 x + t_2(x)\sin x$, sledi

$$|f(x)\sin^2 x - t_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{3}$$

Analognim rasuđivanjem, polazeći od funkcije $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, dobijamo da postoji trigonometrijski polinom $t_4(x)$, takav da važi $\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - t_4(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, odnosno, uz oznaku $t_5(x) = t_4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

$$|f(x)\cos^2 x - t_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{4}$$

Iz relacija (1), (3) i (4) sledi da za trigonometrijski polinom $t(x) = t_3(x) + t_5(x)$ važi

$$|f(x) - t(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [-\pi, \pi]. \quad \blacksquare$$

Korišćenjem dokazane Vajerštrasove teoreme može se lako izvesti sledeća osnovna

Teorema 8.3.2

Trigonometrijski sistem

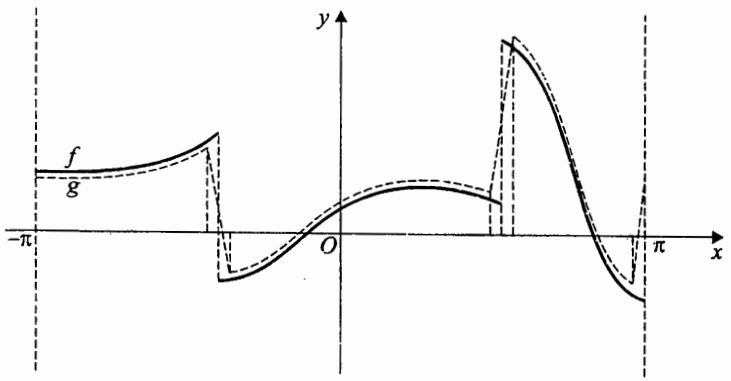
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

je potpun u prostoru deo-po-deo neprekidnih funkcija $C_0[-\pi, \pi]$.

Dokaz.

Dokazaćemo da važi uslov 1° teoreme 2.1, tj. da za svaku funkciju $f \in C_0[-\pi, \pi]$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom t, takav da je

$$\|f - t\| = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - t(x)]^2\, dx\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$



Sl. 8.3.1

Najpre, za datu funkciju $f \in C_0[-\pi, \pi]$ odredimo neprekidnu funkciju $g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, takvu da je $g(-\pi) = g(\pi)$ i $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Postupak određivanja funkcije g skiciran je na slici 1 na kojoj je punom linijom nacrtan grafik date deo-po-deo neprekidne funkcije f, a isprekidanom grafik tražene funkcije g — ona se poklapa sa f svuda osim u dovoljno malim okolinama tačaka prekida funkcije f, odnosno tačke π; u tim okolinama funkcija g je linearna.

Za nađenu funkciju g, na osnovu teoreme 1, postoji trigonometrijski polinom t, takav da je $|g(x) - t(x)| < \varepsilon/2\sqrt{2\pi}$ za sve $x \in [-\pi, \pi]$,odnosno

$$\|g - t\| = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - t(x)]^2\, dx\right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle je

$$\|f - t\| \leqslant \|f - g\| + \|g - t\| < \varepsilon,$$

čime je teorema dokazana. ■

Uzimajući u obzir teoremu 2.1, možemo iz dokazane teoreme 2 izvesti sledeću posledicu.

Posledica 8.3.1

1° *Trigonometrijski Furijeov red svake deo-po-deo neprekidne funkcije* $f \in C_0[-\pi, \pi]$ *konvergira toj funkciji u srednjem.*

2° *Ako su trigonometrijski Furijeovi koeficijenti* a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbf{N})$ *funkcije* $f \in C_0[-\pi, \pi]$ *definisani relacijama* (5) *odeljka 2, onda važi Parsevalova jednakost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{5}$$

3° *Ako funkcija* $f \in C_0[-\pi, \pi]$ *ima sve trigonometrijske Furijeove koeficijente jednake nuli, onda je* $f \equiv 0$. *Ako funkcije* $f, g \in C_0[-\pi, \pi]$ *imaju trigonometrijske Furijeove redove čiji su svi odgovarajući koeficijenti međusobno jednaki, onda je* $f \equiv g$. ■

Primer 8.3.1

Posmatrajmo funkciju $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ datu sa $f(x) = x$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Očigledno je $f \in C_0[-\pi, \pi]$. Na osnovu formula (5) odeljka 2 dobijamo da su njeni trigonometrijski Furijeovi koeficijenti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Na taj način, trigonometrijski Furijeov red funkcije f ima oblik

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

i, prema posledici 1.1°, konvergira toj funkciji u srednjem, tj. važi

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[x-2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right]^2 dx\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Primetimo, međutim, da taj red ne konvergira tačka-po-tačka funkciji f na $[-\pi,\pi]$. Zaista, za $x=-\pi$ ili $x=\pi$ njegova suma je očigledno jednaka nuli, dok je $f(-\pi)=-\pi$, $f(\pi)=\pi$.

Parsevalova jednakost (5) u ovom primeru glasi

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx, \qquad \text{tj.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \quad \blacktriangle$$

8.4. OBIČNA KONVERGENCIJA TRIGONOMETRIJSKOG FURIJEOVOG REDA

Na osnovu rezultata prethodnog odeljka, trigonometrijski Furijeov red svake deo-po-deo neprekidne funkcije konvergira toj funkciji u srednjem. To, međutim, ne znači da on konvergira toj funkciji u svakoj tački. Zaista, već sasvim jednostavan primer 3.1 pokazuje da se može dogoditi da u nekim tačkama odgovarajuće jednakosti ne važe. Poznati su i mnogo „gori" primeri — recimo, Di Boa Rejmon* je pokazao da postoji neprekidna funkcija $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$ koja zadovoljava uslov $f(-\pi)=f(\pi)$ i čiji trigonometrijski Furijeov red divergira u unapred zadatom beskonačnom svuda gustom skupu tačaka segmenta $[-\pi,\pi]$. Čak je i pitanje da li trigonometrijski Furijeov red date deo-po-deo neprekidne funkcije mora da konvergira bar u jednoj tački datog segmenta tek 1966. godine dobilo potvrdan odgovor (Karleson**).

Dakle, problem obične konvergencije trigonometrijskog Furijeovog reda date funkcije mnogo je teži od problema konvergencije u srednjem. U ovom odeljku daćemo neke dovoljne uslove koji obezbeđuju takvu konvergenciju. Kako ćemo isključivo govoriti o trigonometrijskim Furijeovim redovima, to ćemo u daljem izostavljati atribut „trigonometrijski".

Posmatraćemo funkcije $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koje su 2π-periodične i apsolutno integrabilne (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu) na segmentu $[-\pi,\pi]$. Za takve funkcije su definisani Furijeovi koeficijenti

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt, \quad k=0,1,2,\dots,\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned}$$

* P. Du Bois Reymond (1831–1889), nemački matematičar

** L. Carleson (1928–), švedski matematičar

a n-ta parcijalna suma $s_n(x)$ odgovarajućeg Furijeovog reda imâ oblik

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Zamenjujući vrednosti koeficijenata, tu sumu možemo transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned} s_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\cos kx\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\sin kx\,dt\right]\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}\,dt. \end{aligned}$$

U poslednjem prelazu koristili smo poznatu formulu

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u};$$

pri tom podrazumevamo da dobijeni razlomak u tačkama u kojima je $x-t=2m\pi$ ($m\in\mathbf{Z}$) ima takvu vrednost da je taj razlomak neprekidna funkcija. Uzimajući tu konvenciju u obzir, označimo

$$D_n(u)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}.$$

Izraz $D_n(u)$ naziva se *Dirihleovim jezgrom*. Pomoću njega se parcijalna suma $s_n(x)$ zapisuje u obliku

$$(2)\qquad s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Navedimo sledeća dva jednostavna svojstva Dirihleovog jezgra.

1° D_n je 2π-periodična i parna funkcija.

2° $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)\,du=1$.

Svojstvo 1° je očigledno, a svojstvo 2° se dobija integracijom izraza $D_n(u)=2\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)$.

Za dalje ispitivanje sume $s_n(x)$ biće nam potrebno sledeće važno pomoćno tvrđenje.

Lema 8.4.1(Riman)

Neka je $(a,b) \subset \mathbf{R}$ *proizvoljan (konačan ili beskonačan) interval i* $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ *apsolutno integrabilna funkcija (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu). Tada je*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Dokaz.

Dokažimo jednakost $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Druga jednakost dokazuje se analogno.

Pretpostavimo, određenosti radi, da je tačka b jedini (eventualni) singularitet integrala $\int_a^b f(x)\,dx$. Tada za dato $\varepsilon > 0$ možemo izabrati segment $[a,\beta] \subset [a,b)$, tako da je za svako $\lambda \in \mathbf{R}$ ispunjeno

$$(3)\quad \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^\beta f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \int_\beta^b |f(x)\cos\lambda x|\,dx \leqslant \int_\beta^b |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Funkcija f je integrabilna na $[a,\beta]$, pa postoji podela $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tog segmenta, takva da za odgovarajuću donju Darbuovu sumu $s(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$, $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $i = 1, \dots, n$, važi

$$0 \leqslant \int_a^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

Definišimo funkciju $g\colon [a,\beta] \to \mathbf{R}$ pomoću

$$g(x) = m_i \quad \text{za} \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

i $g(\beta) = m_n$. Tada je $g(x) \leqslant f(x)$ za $x \in [a,\beta]$ i

(4)

$$\left|\int_a^\beta f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^\beta g(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \int_a^\beta |f(x)-g(x)|\cdot|\cos\lambda x|\,dx$$
$$\leqslant \int_a^\beta [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

Najzad, za deo-po-deo konstantnu funkciju g važi

$$(5)\quad \int_a^\beta g(x)\cos\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i\cos\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\sin\lambda x_i - \sin\lambda x_{i-1}}{\lambda} \to 0 \quad (\lambda\to\infty).$$

Kombinujući dobijene procene (3), (4) i (5), izvodimo traženu jednakost $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. ■

Primetimo da kao specijalan slučaj dokazane leme ponovo dobijamo tvrđenje posledice 2.1, primenjeno na trigonometrijske Furijeove koeficijente.

Sledeća osnovna teorema obično nosi naziv *Rimanov princip lokalizacije.*

Teorema 8.4.1

Neka je funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π*-periodična i apsolutno integrabilna (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu) na* $[-\pi,\pi]$ *i neka* $x \in (-\pi,\pi)$. *Ponašanje Furijeovog reda funkcije* f *u tački* x *(dakle, njegova konvergencija ili divergencija i, u slučaju konvergencije, vrednost njegovog zbira) zavisi samo od vrednosti funkcije* f *u nekoj, proizvoljno maloj, okolini tačke* x.

Dokaz.

U izrazu (2) za n-tu parcijalnu sumu Furijeovog reda funkcije f zamenimo $x-t$ sa u. Ako iskoristimo činjenicu da integral 2π-periodične funkcije ima istu vrednost na bilo kom intervalu dužine 2π, dobijamo

$$(6)\quad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du.$$

Izaberimo sada proizvoljan broj δ za koji je $0 < \delta < \pi$. Napišimo poslednji integral u obliku zbira tri integrala po segmentima $[-\pi,-\delta]$, $[-\delta,\delta]$ i $[\delta,\pi]$. Ako u prvom od tih integrala zamenimo $-u$ sa u (i time ga prevedemo u integral po segmentu $[\delta,\pi]$), koristeći parnost Dirihleovog jezgra, dobijamo

(7)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-u)D_n(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{\sin(u/2)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du.$$

Kako je funkcija $1/\sin(u/2)$ ograničena na segmentu $[\delta,\pi]$, to je funkcija $\dfrac{f(x+u)+f(x-u)}{\sin(u/2)}$ apsolutno integrabilna na tom segmentu. Zato primenom leme 1 zaključujemo da drugi integral na desnoj strani relacije (7) teži nuli kad $n \to \infty$. Na taj način, ponašanje parcijalne sume $s_n(x)$ zavisi od ponašanja prvog integrala u toj relaciji, a u njemu učestvuju samo vrednosti funkcije f u okolini $(x-\delta, x+\delta)$ tačke x. Time je tvrđenje teoreme dokazano. ■

Ukažimo na, u određenom smislu, neočekivanost rezultata teoreme 1. Naime, koeficijenti a_n, b_n Furijeovog reda funkcije f izražavaju se integralima (1) i, dakle, zavise od vrednosti te funkcije na celom intervalu $[-\pi,\pi]$; na konvergenciju toga reda u tački x, međutim, utiču samo one vrednosti koje su blizu tačke x.

Primetimo, takođe, da iz prethodnog dokaza sledi da tačka x može biti i jedan od krajeva segmenta $[-\pi,\pi]$ (na primer, $x = \pi$), no u tom slučaju na konvergenciju reda u toj tački utiču kako vrednosti iz okoline $(\pi-\delta,\pi]$, tako i vrednosti iz okoline $[-\pi,-\pi+\delta)$.

Dokažimo sada sledeći *Dinijev kriterijum* koji daje dovoljne uslove za konvergenciju Furijeovog reda.

Teorema 8.4.2

Neka je $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π*-periodična funkcija, apsolutno integrabilna na* $[-\pi, \pi]$ *i* $x \in \mathbf{R}$. *Ako*

1° *postoje levi i desni limesi* $f(x-0)$ *i* $f(x+0)$ *funkcije* f *u tački* x,

2° *za neko* $\varepsilon > 0$ *apsolutno konvergiraju integrali*

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du, \qquad \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du,$$

tada Furijeov red funkcije f *konvergira u tački* x *i zbir mu je*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Specijalno, ako je funkcija f *još i neprekidna u tački* x, *važi*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Dokaz.

Predstavimo parcijalnu sumu $s_n(x)$ Furijeovog reda funkcije f u obliku drugog integrala u formuli (6), a zatim taj integral napišimo kao zbir integrala po intervalima $[-\pi, 0]$ i $[0, \pi]$. Ako u prvom od tih integrala zamenimo $-u$ sa u, dobijamo

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+u)+f(x-u)]D_n(u)\,du.$$

Koristeći svojstvo 2° Dirihleovog jezgra, dodajmo i oduzmimo poslednjem izrazu vrednost

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} D_n(u)\,du.$$

Dobijamo

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2} + \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2}\right] D_n(u)\,du \\ &= \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin(u/2)} + \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin(u/2)}\right] \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du. \end{aligned}$$

Ako uzmemo u obzir da je $2\sin\dfrac{u}{2} \sim u$ $(u \to 0)$ i pretpostavku 2° teoreme, zaključujemo da se na poslednji integral može primeniti Rimanova lema 1, te on teži nuli kad $n \to \infty$. Time je dokazano da, pod pretpostavkama teoreme, važi

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \quad \blacksquare$$

Posledica 8.4.1 *(Lipšicov kriterijum)*

Neka je 2π*-periodična funkcija* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *apsolutno integrabilna na* $[-\pi, \pi]$ *i neprekidna u tački* $x \in \mathbf{R}$. *Ako postoje konstante* $L \in \mathbf{R}$ *i* $\alpha \in (0, 1]$, *takve da za neko* $\delta > 0$ *i svako* $u \in (-\delta, \delta)$ *važi*

$$|f(x+u)-f(x)| \leqslant L|u|^{\alpha}, \tag{8}$$

onda Furijeov red funkcije f *u tački* x *konvergira i zbir mu je jednak* $f(x)$.

Dokaz.

Potrebno je samo proveriti da važi uslov 2° teoreme 2. No, kako je

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right| \leqslant \frac{L}{|u|^{1-\alpha}}, \quad |u| < \delta,$$

to apsolutna konvergencija navedenih integrala sledi iz poredbenog kriterijuma. ■

Uslov (8) prethodne posledice još se naziva *Helderovim uslovom*, a funkcije koje ga zadovoljavaju *funkcijama Helderove klase*. Lako se proverava da tvrđenje posledice ostaje na snazi ako se umesto neprekidnosti funkcije f u tački x i Helderovog uslova pretpostavi samo postojanje jednostranih limesa $f(x+0)$ i $f(x-0)$ i važenje sledećih „jednostranih" Helderovih uslova

$$|f(x+u)-f(x+0)| \leqslant Lu^{\alpha}, \quad |f(x-u)-f(x-0)| \leqslant Lu^{\alpha}, \qquad 0 < u < \delta,$$

za neke α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ i $L > 0$. Naravno, u tom slučaju je zbir Furijeovog reda jednak $\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Posledica 8.4.2

Ako je funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π*-periodična i deo-po-deo glatka (tj. ima deo-po-deo neprekidan izvod) na* $[-\pi, \pi]$, *tada njen Furijeov red konvergira u svakoj tački* $x \in \mathbf{R}$ *i suma mu je* $\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Dokaz.

Koristeći Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti, lako se pokazuje da deo-po-deo glatka funkcija zadovoljava Helderov uslov (8) sa eksponentom $\alpha = 1$ u svakoj tački x u kojoj je njen izvod definisan i neprekidan. U eventualnoj tački prekida izvoda zadovoljeni su odgovarajući jednostrani uslovi. ■

Primer 8.4.1

Funkciji $f(x) = x$ iz primera 3.1 promenimo vrednosti u krajevima intervala $[-\pi, \pi]$, stavljajući $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, a zatim dobijenu funkciju 2π-periodično produžimo na celu realnu pravu. Dobijenu funkciju označimo ponovo sa f. Dakle je

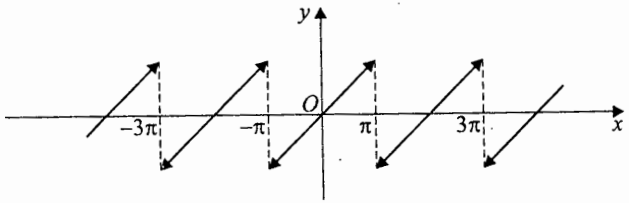
$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi; \qquad f(-\pi) = f(\pi) = 0;$$
$$f(x+2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

sl. 1. Funkcija f zadovoljava sve uslove posledice 2 i pri tom je $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=f(x)$ za svako $x\in\mathbf{R}$. Zato njen Furijeov red konvergira vrednosti $f(x)$ u svakoj tački $x\in\mathbf{R}$. Specijalno, važi

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}x, & \text{za } -\pi<x<\pi,\\ 0, & \text{za } |x|=\pi.\end{cases}$$

Stavljajući $x=\pi/2$ dobijamo

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}. \tag{9}$$ ▲



Sl. 8.4.1

Na kraju, navedimo još neke napomene, korisne kod efektivnog razvijanja datih funkcija u Furijeove redove.

1° Sva razmatranja ovog odeljka mogu se, sa nebitnim izmenama, sprovesti za funkcije čiji je period jednak $2l$, $l>0$. U tom slučaju (v. i primer 2.1.4°) Furijeovi koeficijenti funkcije f imaju oblik

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots,$$

a odgovarajući Furijeov red je

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

2° Ako je $2l$-periodična funkcija $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ parna, jasno je da važi

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\dots;\qquad b_n=0,\quad n=1,2,\dots,$$

pa se ona, ako važe odgovarajući uslovi, razvija u „red po kosinusima“ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$.

Slično, ako je funkcija f neparna, njeni koeficijenti su

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\dots;\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots,$$

a Furijeov red joj je „sinusni“: $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Naravno, svaku funkciju, definisanu, na primer, na segmentu $[0,l]$ možemo, po želji, parno ili neparno produžiti na segment $[-l,l]$ i zatim je razviti u kosinusni, odnosno sinusni red.

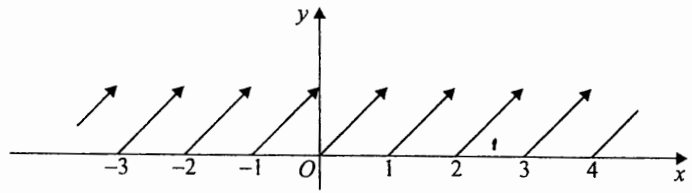
Primeri 8.4.2

1° Funkcija $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$, sl. 2, periodična je s periodom $2l=1$. Zato je

$$a_0=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\,dx=2\int_0^1 x\,dx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\cos 2n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx=0,\quad n\in\mathbf{N},$$

$$b_n=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi},\quad n\in\mathbf{N}.$$



Sl. 8.4.2

Furijeov red funkcije f ima oblik

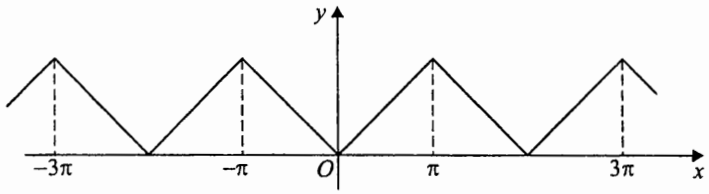
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}.$$

Kako funkcija f zadovoljava sve uslove posledice 2 (sa $2l$ umesto 2π), to taj red konvergira za sve $x\in\mathbf{R}$. Pri tom je njegov zbir jednak $f(x)$ za svako $x\notin\mathbf{Z}$, dok je u svakoj tački $x\in\mathbf{Z}$ vrednost tog zbira $1/2$. Specijalno, za $x=1/4$ ponovo dobijamo rezultat (9).

2° Funkciju $f(x)=x$ razvićemo u kosinusni red na intervalu $[0,\pi]$.

Posmatrajmo funkciju $g\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definisanu pomoću

$$g(x)=x,\quad x\in[0,\pi];\qquad g(-x)=g(x),\quad x\in[0,\pi];$$
$$g(x+2\pi)=g(x),\quad x\in\mathbf{R},$$



Sl. 8.4.3

sl. 3. Ona zadovoljava uslove posledice 2, pri čemu je, zbog neprekidnosti, $g(x) = \frac{1}{2}[g(x-0)+g(x+0)]$ za sve $x \in \mathbf{R}$. Koeficijenti funkcije g su $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi$ i

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{za } n = 2k-1. \end{cases}$$

Zato je

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

i, specijalno,

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Stavljajući u poslednju jednakost $x = \pi$ dobijamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3° Neka je a pozitivan realan broj koji nije ceo. Nađimo Furijeov red 2π-periodične funkcije f, date sa $f(x) = \cos ax$ za $x \in [-\pi, \pi]$. Jasno je da su ispunjeni uslovi da taj red za svako $x \in \mathbf{R}$ ima sumu jednaku $f(x)$.

Zbog parnosti funkcije f je $b_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dakle, za $x \in [-\pi, \pi]$ je

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx.$$

Ako u tu relaciju stavimo $x = \pi$ i podelimo je (različitim od nule) brojem $\sin a\pi/\pi$, dobijamo

$$\pi\operatorname{ctg} a\pi - \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

Neka je sada $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$. Izvršimo integraciju prethodne jednakosti po a na segmentu $[0, \alpha]$, uzimajući u obzir da red na desnoj strani na tom segmentu ravnomerno konvergira (što je lako proveriti). Dobijamo

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right),$$

odnosno

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Može se dokazati da navedeno predstavljanje sinusa (koje smo koristili u odeljku 7.4) važi za svako $\alpha \in \mathbf{R}$. ▲

8.5. USLOVI RAVNOMERNE KONVERGENCIJE. DIFERENCIRANJE I INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKOG REDA

Neka je dat proizvoljan trigonometrijski red

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx). \tag{1}$$

Takav red, makar bio i konvergentan na celom $\mathbf{R}$, ne mora biti Furijeov red nijedne funkcije. Zaista, na osnovu primera 2.2, trigonometrijski Furijeovi koeficijenti a_0, a_n, b_n neke funkcije f zadovoljavaju uslov da red $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ konvergira, a takav uslov ne mora zadovoljavati konvergentan red (1) (v. zadatak 8). Međutim, ako taj red konvergira ravnomerno na $\mathbf{R}$, tada je on Furijeov red svoje sume f. Zaista, u slučaju ravnomerne konvergencije, red (1), kao i redovi koji se iz njega dobijaju množenjem sa $\cos kx$, odnosno $\sin kx$, mogu se integrisati član-po-član, što, zbog ortogonalnosti trigonometrijskog sistema, daje poznate izraze za Furijeove koeficijente

$$\alpha_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k \in \mathbf{N}\cup\{0\},$$

$$\beta_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Postavimo sada obrnuto pitanje: kada je Furijeov trigonometrijski red neke funkcije f ravnomerno konvergentan? Jasno je da je za to neophodno da funkcija f bude neprekidna i 2π-periodična (jer su takve parcijalne sume njenog reda, što se ravnomernom konvergencijom održava). U sledećem stavu dati su jednostavni dovoljni uslovi ravnomerne konvergencije.

Stav 8.5.1

Neka je funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna i 2π-periodična i neka postoji izvod f' te funkcije koji je deo-po-deo neprekidan na $[-\pi, \pi]$. Tada Furijeov red funkcije f apsolutno i ravnomerno na $\mathbf{R}$ konvergira toj funkciji.

Dokaz.

Primetimo najpre da zbog 2π-periodičnosti funkcije f važi $f(-\pi) = f(\pi)$. Označimo sa a_n, b_n Furijeove koeficijente funkcije f, a sa a'_n, b'_n Furijeove koeficijente funkcije f'. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n,$$
$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n,$$

za $n \in \mathbf{N}$. Kako $f' \in C_0[-\pi, \pi]$, to iz Beselove nejednakosti (primer 2.2) sledi da red $\sum_{n=1}^{\infty}({a'_n}^2 + {b'_n}^2)$ konvergira. S druge strane, iz prethodnih relacija, koristeći elementarnu nejednakost $|x|\cdot|y| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, dobijamo

$$|a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}({a'_n}^2 + {b'_n}^2) + \frac{1}{n^2}.$$

Kako i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira, to odatle sledi da konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$. No, kako njegovi članovi očigledno majoriraju članove $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ Furijeovog reda funkcije f, to na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma zaključujemo da taj Furijeov red apsolutno i ravnomerno konvergira na $\mathbf{R}$. ■

Iz dokaza prethodnog stava može se zaključiti da glatkost funkcije f „poboljšava" konvergenciju njenog Furijeovog reda, kao i reda $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$, gde su a_n, b_n Furijeovi koeficijenti funkcije f. Dalje preciziranje ovog zaključka daje sledeći

Stav 8.5.2

Neka 2π-periodična funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pripada klasi $C^p[-\pi, \pi]$, tj. neka ima p neprekidnih izvoda i neka na $[-\pi, \pi]$ ona ima deo-po-deo neprekidan izvod $f^{(p+1)}$. Tada konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p(|a_n| + |b_n|). \tag{2}$$

Ako je pri tom $p > 0$, tada se Furijeov red funkcije f može p puta diferencirati član-po-član na $[-\pi, \pi]$.

Dokaz.

Analognim postupkom kao u dokazu stava 1, ako sa $a_n^{(p+1)}$, $b_n^{(p+1)}$ označimo Furijeove koeficijente funkcije $f^{(p+1)}$, dobijamo da važi

$$n^p(|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_n^{(p+1)}|}{n} + \frac{|b_n^{(p+1)}|}{n} \leqslant \frac{1}{2}[(a_n^{(p+1)})^2 + (b_n^{(p+1)})^2] + \frac{1}{n^2}.$$

Odatle, primenom Beselove nejednakosti na funkciju $f^{(p+1)}$, zaključujemo da konvergira red (2).

Neka je $p \geqslant 1$. Ako p puta formalno diferenciramo Furijeov red funkcije f, dobijamo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\left[a_n\cos\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right) + b_n\sin\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Njegovi članovi se po apsolutnoj vrednosti mogu majorirati članovima konvergentnog reda (2), što na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma povlači njegovu ravnomernu konvergenciju. Na osnovu teoreme 1.3.4 i stava 1 zaključujemo da je zbir reda (3) jednak $f^{(p)}(x)$. ■

Naglasimo da uslov 2π-periodičnosti funkcije f u prethodnom stavu implicira da važe uslovi

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi), \quad \ldots, \quad f^{(p)}(-\pi) = f^{(p)}(\pi). \tag{4}$$

Dakle, ako bismo želeli da primenom tog stava dokažemo mogućnost diferenciranja Furijeovog reda neke funkcije $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, morali bismo, pored određene glatkosti te funkcije, da pretpostavimo važenje uslova (4). Naime, tada bi bilo moguće funkciju f 2π-periodično produžiti na čitavu realnu pravu, a zatim iskoristiti stav 2.

Problem integracije Furijeovog reda neke funkcije član-po-član mnogo je jednostavniji od problema njegovog diferenciranja. Naime, može se pokazati da se red dobijen formalnom integracijom „bolje" ponaša od polaznog reda. Preciznije, važi

Stav 8.5.3

Neka je $f \in C_0[-\pi, \pi]$ i neka je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

njen Furijeov red. Tada (nezavisno od toga konvergira li taj red ili ne) za sve $x \in [-\pi, \pi]$ važi

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,dt,$$

pri čemu poslednji red konvergira ravnomerno na $[-\pi, \pi]$.

Dokaz.

Posmatrajmo funkciju

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt.$$

Ona je neprekidna na $[-\pi, \pi]$ i ima deo-po-deo neprekidan izvod (jer je funkcija f deo-po-deo neprekidna). Pored toga je $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \pi a_0 = 0$, tj. $F(\pi) = F(-\pi)$. Na osnovu stava 1 sledi da se funkcija F može na $[-\pi, \pi]$ razložiti u ravnomerno konvergentan Furijeov red

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx). \tag{5}$$

Za koeficijente tog reda se parcijalnom integracijom (slično kao u dokazu stava 1) dobija

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Da bismo odredili A_0 stavimo u relaciji (5) $x = 0$ i dobijamo

$$A_0 = -2\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Dakle je

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrđenje stava. ■

Primer 8.5.1

Polazeći od rezultata primera 4.1

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \qquad -\pi < x < \pi,$$

naći ćemo Furijeov red funkcije $f(x) = x^2$. Integracijom datog reda član-po-član u intervalu $[0, x]$, $|x| < \pi$, dobija se

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^x \sin nt\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Prvi sabirak poslednjeg zbira može se odrediti na osnovu činjenice da on mora biti slobodni član Furijeovog reda funkcije $x^2/2$, dakle je njegova vrednost

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Odatle je

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Ponovnom integracijom može se dobiti

$$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \qquad -\pi < x < \pi. \quad ▲$$

8.6. FURIJEOV INTEGRAL

Da bi se realna funkcija definisana na čitavoj realnoj pravoj mogla razviti u Furijeov red po nekom trigonometrijskom sistemu, neophodno je da bude periodična. Za neperiodične funkcije, međutim, pod određenim uslovima, moguće je razvijanje u kontinualni analogon Furijeovog reda — Furijeov integral. Navedimo najpre neka formalna (nestroga) razmatranja koja će nas dovesti do formula koje ćemo kasnije dokazati.

Pretpostavimo da funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadovoljava uslove da se u proizvoljnom intervalu $(-l, l)$ može razviti u trigonometrijski Furijeov red

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Drugim rečima, neka je za $-l < x < l$ ispunjeno

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l}(t - x)\,dt.$$

Da li izraz na desnoj strani ove jednakosti ima limes kada $l \to \infty$? Njegov prvi sabirak teži nuli ako za funkciju f pretpostavimo da je integrabilna na $(-\infty, \infty)$. Što se beskonačne sume tiče, nju možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta y_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos y_n(t - x)\,dt,$$

gde smo označili $y_0 = 0$, $y_n = \dfrac{n\pi}{l}$ i $\Delta y_n = y_n - y_{n-1} = \dfrac{\pi}{l}$ za $n \in \mathbf{N}$. Tako zapisana, kad $l \to \infty$ ona predstavlja neku vrstu integralne sume nesvojstvenog integrala

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(t - x)\,dt\right] dy.$$

To znači da možemo očekivati da, pod nekim uslovima, važi

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos y(t-x)\,dt, \tag{1}$$

odnosno

$$f(x) = \int_0^\infty [a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\,dy, \tag{2}$$

gde je

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos yt\,dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin yt\,dt. \tag{3}$$

Za jednakost (1), odnosno (2), u slučajevima kada ona važi, kazaćemo da predstavlja razvoj funkcije f u *Furijeov integral*. Funkcije (3) predstavljaju kontinualan analogon trigonometrijskih Furijeovih koeficijenata funkcije f i nazivaju se još *kosinusnom*, odnosno *sinusnom Furijeovom transformacijom* te funkcije.

Navešćemo sada neke dovoljne uslove koji obezbeđuju mogućnost razvoja date funkcije u Furijeov integral.

Pretpostavljaćemo da je funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ lokalno deo-po-deo neprekidna (tj. deo-po-deo neprekidna na svakom konačnom segmentu) i apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, tj. pretpostavljaćemo da konvergira integral $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx$. Te pretpostavke su očigledno dovoljne da obezbede definisanost funkcija $a(y)$ i $b(y)$ za svako $y \in \mathbf{R}$, kao i njihovu neprekidnost. Drugi uslov koji ćemo postaviti biće isti kao u Dinijevom kriterijumu (teorema 4.2) za konvergenciju trigonometrijskog Furijeovog reda.

Teorema 8.6.1

Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ lokalno deo-po-deo neprekidna i apsolutno integrabilna funkcija i neka je $x \in \mathbf{R}$. Ako za neko $\varepsilon > 0$ apsolutno konvergiraju integrali

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du, \qquad \int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du, \tag{4}$$

tada Furijeov integral funkcije f u tački x konvergira i ima vrednost

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Specijalno, ako je funkcija f neprekidna u tački x, onda važe formule (1), odnosno (2).

Dokaz.

Da bismo ispitali konvergenciju Furijeovog integrala funkcije f i odredili njegovu vrednost, posmatrajmo odgovarajući „delimični" integral

$$I_\beta = \int_0^\beta [a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^\beta dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

$\beta > 0$, koji je definisan zbog neprekidnosti funkcija $a(y)$ i $b(y)$. Konvergencija integrala $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\,dt$ obezbeđuje ravnomernu konvergenciju (po $y \in [0,\beta]$) nesvojstvenog integrala $\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos y(t-x)\,dt$, što, na osnovu teoreme 7.3.4, znači da je dozvoljena promena poretka integrala. Dakle, važi

$$I_\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt \int_0^\beta \cos y(t-x)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\,dt.$$

Smenom $t - x = u$ dobijamo

$$I_\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+u)\frac{\sin\beta u}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x-u)+f(x+u)]\frac{\sin\beta u}{u}\,du. \tag{5}$$

U drugom prelazu napisali smo integral po intervalu $(-\infty,\infty)$ kao zbir integrala po intervalima $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$, a zatim u prvom od njih zamenili u sa $-u$.

Iskoristimo sada poznatu vrednost Dirihleovog integrala (primer 7.3.3), zapisanog u obliku

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\beta u}{u}\,du.$$

Ako tu jednakost pomnožimo sa $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$, pa je oduzmemo od (5), dobijamo

$$I_\beta - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u} + \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right]\sin\beta u\,du.$$

Ostaje da se dokaže da integral na desnoj strani ove jednakosti teži nuli kad $\beta \to \infty$. U tom cilju rastavimo taj integral na integrale po intervalima $(0,\varepsilon)$ i (ε,∞). Prvi od tih integrala teži nuli na osnovu Rimanove leme 4.1 zbog pretpostavljene apsolutne konvergencije integrala (4). Dalje, na osnovu iste leme, važi

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-u)+f(x+u)}{u}\sin\beta u\,du \to 0 \quad (\beta \to \infty),$$

jer je funkcija f apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, pa je funkcija $\dfrac{f(x-u)+f(x+u)}{u}$ apsolutno integrabilna na $[\varepsilon,\infty)$. Najzad,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin\beta u}{u}\,du = \int_{\beta\varepsilon}^\infty \frac{\sin v}{v}\,dv$$

teži nuli kad $\beta \to \infty$ zbog konvergencije Dirihleovog integrala.

Time je teorema u potpunosti dokazana. ∎

U praksi ćemo najčešće koristiti sledeće dovoljne uslove konvergencije Furijeovog integrala.

Posledica 8.6.1

Ako je funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *apsolutno integrabilna na* $\mathbf{R}$ *i deo-po-deo glatka na svakom konačnom intervalu, tada njen Furijeov integral konvergira u svakoj tački* $x \in \mathbf{R}$ *i vrednost mu je* $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. ■

Slično kao u slučaju Furijeovih redova, kada je funkcija f parna, odnosno neparna, formule (2) i (3) dobijaju nešto jednostavniji oblik. Tako, u slučaju parne funkcije imamo razvoj u „kosinusni Furijeov integral"

$$f(x) = \int_0^\infty a(y)\cos yx\,dy, \quad a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos yt\,dt,$$

a u slučaju neparne u „sinusni"

$$f(x) = \int_0^\infty b(y)\sin yx\,dy, \quad b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin yt\,dt.$$

Takođe, svaku funkciju datu na intervalu $(0,\infty)$, koja zadovoljava određene uslove, možemo parno, odnosno neparno produžiti na $\mathbf{R}$, a zatim je razviti u kosinusni, odnosno sinusni Furijeov integral.

Primeri 8.6.1

1° Neka je $a < b$ i

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) = \begin{cases} 2, & \text{za } a < x < b, \\ 1, & \text{za } x = a \text{ ili } x = b, \\ 0, & \text{za } x < a \text{ ili } x > b. \end{cases}$$

Funkcija f zadovoljava sve uslove posledice 1, pri čemu je $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ za sve $x \in \mathbf{R}$. Pri tom je

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \cos yx\,dx = \frac{2}{\pi y}(\sin by - \sin ay),$$
$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \sin yx\,dx = \frac{2}{\pi y}(\cos ay - \cos by).$$

Zato je za sve $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\sin by - \sin ay)\cos yx + (\cos ay - \cos by)\sin yx}{y}\,dy$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y(b-x) + \sin y(x-a)}{y}\,dy.$$

Iz ovog rezultata može se izvesti vrednost Dirihleovog prekidnog množitelja iz zadatka 7.13.

2° Funkciju $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\ x > 0)$ produžimo najpre parno, a zatim neparno na realnu pravu (u prvom slučaju produženoj funkciji dodeljujemo vrednost 1 u tački $x = 0$, a u drugom slučaju vrednost 0). Nalazeći kosinusnu Furijeovu transformaciju

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos yx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+y^2},$$

odnosno sinusnu transformaciju

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\sin yx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{a^2+y^2}$$

funkcije f, dobijamo da je

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos yx}{a^2+y^2}\,dy, \quad x \geqslant 0,$$

odnosno

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\sin yx}{a^2+y^2}\,dy, \quad x > 0.$$

Time su dobijene i vrednosti Laplasovih integrala iz zadatka 7.8.

3° Odredimo neprekidnu funkciju $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava integralnu jednačinu

$$\int_0^\infty \varphi(y)\sin xy\,dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x, & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{za } x > \pi. \end{cases}$$

Jasno je da φ mora biti sinusna Furijeova transformacija funkcije na desnoj strani prethodne jednakosti, pa je

$$\varphi(y) = \int_0^\pi \sin x\sin yx\,dx = \begin{cases} \frac{\sin \pi y}{1-y^2}, & \text{za } y \neq 1, \\ \pi/2, & \text{za } y = 1. \end{cases}$$ ▲

Formalnom primenom *Ojlerove formule*

$$e^{iyx} = \cos yx + i\sin yx,$$

može se pokazati da se Furijeove relacije (2), (3) mogu zapisati u obliku

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\beta\to+\infty}\int_{-\beta}^{\beta} e^{-iyx}\widehat{f}(y)\,dy, \tag{6}$$

gde je

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx}f(x)\,dx. \tag{7}$$

Kompleksna funkcija $\widehat{f}$ definisana relacijom (7) naziva se *Furijeovom transformacijom* apsolutno integrabilne funkcije $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Formula (6) naziva se *Furijeovom formulom inverzije*. U slučaju da je funkcija $\widehat{f}$ takođe apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, ta formula se može zapisati u obliku

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Još se kaže da je funkcija f *inverzna Furijeova transformacija* funkcije $\widehat{f}$. Navedimo bez dokaza neka osnovna svojstva Furijeove transformacije.

1° Ako je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ apsolutno integrabilna funkcija, tada je njena Furijeova transformacija $\widehat{f}$ ravnomerno neprekidna na $\mathbf{R}$ i važi $\widehat{f}(y) \to 0$ kad $|y| \to \infty$.

2° Ako za neko $n \in \mathbf{N}$ konvergira integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^n)|f(x)|\, dx,$$

tada je Furijeova transformacija $\widehat{f}$ n puta diferencijabilna i za $k = 1, 2, \dots, n$ važi

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} (ix)^k f(x)\, dx, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Dakle, s tačnošću do konstantnog faktora, izvod Furijeove transformacije funkcije f je Furijeova transformacija proizvoda $x^k f(x)$.

3° Dualno, ako je f $(n-1)$-puta neprekidno-diferencijabilna na $\mathbf{R}$, postoji $f^{(n)}$ i integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|\, dx, \qquad k = 0, 1, \dots, n,$$

konvergiraju, tada je

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = \left(\frac{y}{i}\right)^n \widehat{f}(y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Dakle, do na konstantan faktor, Furijeova transformacija n-tog izvoda funkcije f jednaka je Furijeovoj transformaciji same funkcije f, pomnoženoj sa y^n.

Na osnovu navedenih osobina zaključujemo da između operatora diferenciranja i operatora množenja funkcije nezavisno promenljivom postoji određena veza koja se uspostavlja Furijeovom transformacijom. Zbog toga se Furijeova transformacija koristi u teoriji diferencijalnih operatora i teoriji (običnih i parcijalnih) diferencijalnih jednačina, jer njena primena ponekad omogućava da se neki problemi diferencijalnog tipa prevedu na odgovarajući algebarski problem i tako lakše reše. Detaljnije o ovome može se naći, na primer, u knjigama [20], [25], [27], [33].

ZADACI

1. 1° Dokazati da u svakom pred-Hilbertovom prostoru X važi *relacija paralelograma*

(1) $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{za } x, y \in X.$$

2° Ako u nekom realnom normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ važi relacija (1), dokazati da se može definisati skalarni proizvod na X, takav da je $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ za $x \in X$.

3° Dokazati da se u normiranom prostoru $C[0,1]$ (sa ravnomernom metrikom) ne može uvesti skalarni proizvod tako da on indukuje njegovu normu.

2. Neka je $c \in \mathbf{R}$, $l > 0$ i $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \dots$ niz rešenja jednačine $\operatorname{tg} l\xi = c\xi$. Dokazati da je sistem funkcija $\{ \sin \xi_n x \mid n \in \mathbf{N} \}$ ortogonalan u $C_0[0, l]$.

3. Neka je $q \in C^\infty[a,b]$, a funkcije $u_n \in C^2[a,b]$ (koje nisu identički jednake nuli) anuliraju se na krajevima intervala $[a,b]$ i zadovoljavaju jednačinu

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),$$

svaka sa svojom vrednošću realnog parametra $\lambda = \lambda_n$. Dokazati da je sistem funkcija $\{ u_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ ortogonalan u prostoru $C_0[a,b]$.

4. Dokazati da sistem funkcija $\left\{ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$ (bez funkcije $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$!) nije potpun u prostoru $C_0[-\pi, \pi]$.

5. Neka su e_i $(i = 1, 2, \dots)$ standardni jedinični vektori Hilbertovog prostora l^2, $e = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots\right) \in l^2$ i X potprostor prostora l^2 obrazovan od svih linearnih kombinacija vektora $e, e_2, e_3, \dots$ (bez vektora e_1!). Dokazati:

1° Prostor X nije zatvoren u l^2 (samim tim, on nije kompletan).

2° U X ne postoji vektor, različit od nultog, koji je ortogonalan na sve vektore sistema $\{e_2, e_3, \dots\}$.

3° Vektor $e \in X$ se ne može proizvoljno dobro aproksimirati linearnim kombinacijama vektora sistema $\{e_2, e_3, \dots\}$ (tj. taj sistem nije potpun u X).

6. 1° Neka je $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormiran niz u pred-Hilbertovom prostoru X. Dokazati da za svaka dva vektora $x, y \in X$ važi $x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n)(y \cdot e_n)$ ako (i samo ako) je niz $\{e_1, e_2, \dots\}$ potpun.

2° Ako sa $a_n(f)$, $b_n(f)$, odnosno $a_n(g)$, $b_n(g)$, označimo trigonometrijske Furijeove koeficijente funkcija $f, g \in C_0[-\pi, \pi]$, dokazati da je

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)].$$

3° Dokazati da za svaku funkciju $f \in C_0[-\pi, \pi]$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}$ konvergira.

7. 1° Neka je $\{x_1, x_2, \dots\}$ linearno nezavisan niz vektora u pred-Hilbertovom prostoru. Dokazati da je niz $\{e_1, e_2, \dots\}$, koji se iz njega dobija pomoću

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1\|}, \quad \dots, \quad e_n = \frac{x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n \cdot e_k)e_k}{\left\|x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n \cdot e_k)e_k\right\|}, \quad \dots$$

ortonormiran. Pri tom se za svako $n \in \mathbf{N}$ lineal nad vektorima $\{x_1, \dots, x_n\}$ poklapa sa linealom nad vektorima $\{e_1, \dots, e_n\}$.

2° Dokazati da se niz normiranih Ležandrovih polinoma $\tilde{P}_n(x)$ (v. primer 2.1.5°) dobija prethodno opisanim postupkom ortogonalizacije iz niza $\{1, x, x^2, \dots\}$ vektora prostora $C_0[-1, 1]$.

3° Dokazati da u svakom separabilnom pred-Hilbertovom prostoru postoji ortonormirana baza.

8. Dokazati da trigonometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ (mada konvergentan za svako $x \in \mathbf{R}$) nije Furijeov red nijedne funkcije $f \in C_0[-\pi, \pi]$.

9. Dokazati da je svaki od nizova $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \dots$, i $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \dots$ ortonormirana baza u prostoru $C_0[0, \pi]$.

10. Dokazati da je

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \text{za } 0 < x < 2\pi;$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 \leqslant x < \pi, \quad b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \; b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^2};$$

$$e^{ax} = \frac{\operatorname{sh} al}{al} + 2\operatorname{sh} al \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2l^2 + n^2\pi^2}\left(al\cos\frac{n\pi x}{l} - n\pi \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \; |x| < l, \; a \neq 0;$$

$$\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad \text{za } x \neq 2k\pi, \; k \in \mathbf{Z};$$

$$\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad |x| \leqslant \pi.$$

Koristeći prethodne rezultate dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

11. Neka je f 2π-periodična funkcija, integrabilna na $[-\pi, \pi]$.

1° Ako ona zadovoljava uslov $f(x + \pi) = -f(x)$ za $x \in \mathbf{R}$, dokazati da za njene Furijeove koeficijente važi $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n+1)x\, dx$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\, dx$.

2° Ako ona zadovoljava uslov $f(\pi + x) = -f(\pi - x) = -f(x)$ za $x \in \mathbf{R}$, dokazati da je $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(2n+1)x\, dx$.

12. Ako su a_n, b_n Furijeovi koeficijenti 2π-periodične funkcije $f(x)$, dokazati da su Furijeovi koeficijenti $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ funkcije $g(x) = f(x + h)$, $h = \text{const}$, dati sa

$$\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh, \quad n \in \mathbf{N}.$$

13. 1° Primenom Vajerštrasove teoreme 1.5.1 dokazati da je niz Ležandrovih polinoma $\tilde{P}_n(x)$ (v. primer 2.1.5°) ortonormirana baza prostora $C_0[-1, 1]$.

2° Pokazati da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-2)!}{n!\,(n-1)2^{2n-1}} P_{2n-1}(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{za } 0 < x < 1. \end{cases}$$

14. Dokazati da su za svaku apsolutno integrabilnu funkciju $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ njena kosinusna i sinusna Furijeova transformacija $a(y)$ i $b(y)$ ravnomerno neprekidne funkcije na $[0, \infty)$ koje teže nuli kad $y \to \infty$.

15. Dokazati da je

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\cos 2xy\, dy = \begin{cases} 1 - x, & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{za } x > 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{a}{2}, \quad a > 0.$$

16. Koristeći poznate vrednosti Frenelovih integrala (primer 9.3.4.4°) dokazati da za funkcije $\cos\frac{x^2}{2}$, $\sin\frac{x^2}{2}$ (koje nisu apsolutno integrabilne na $\mathbf{R}$!) važe razvoji u kosinusne Furijeove integrale na $[0, \infty)$.

INDEKS POJMOVA

Afino preslikavanje 66

Bernulijevi brojevi 38
Binormala 104

Centar krivine 102, 105
Cirkulacija 193

Dekartov list 72
Difeomorfizam 80
Divergencija 221
Diferencijal
  realne funcije 41
  totalni 194
  vektorske funkcije 47
Dinijev stav 20
Dioklesova cisoida 128
Dirihleov množitelj 264
Dirihleovo jezgro 281

Ekstremum
  apsolutni 65
  (strogi) lokalni 59
  uslovni 85
Ekvivalentne putanje 94
Element površine 168
Evoluta 103
Evolventa 128
  kruga 128

Familija funkcija 10
  obično (tačka-po-tačka)
    konvergentna 11
  ravnomerno (uniformno)
    konvergentna 11
Fluks 220
Formula
  Dirihleova 179
  dopunjavanja 259
  Freneova 106
  Furijeova inverzije 298
  Gausova 265
  Gausa-Ostrogradskog 232
  Grinova 201, 240
  Koši-Adamarova 27
  Ležandrova 265
  Ojler-Gausova 259
  Ojlerova 298
  Ojlerova za krivinu površi 125
  Poasonova 238
  Stirlingova 260
  Stoksova 228
  Tejlorova 58
  Vajerštrasova 265
Fundamentalni triedar 103
Funkcija
  analitička 31
  Beselova 37
  beta 256
  diferencijabilna 41, 47
  gama 256
  harmonijska 240
  (lokalno) homogena 65
  implicitna 68
  integrabilna po Rimanu 137, 144
  integrabilna po Stiltjesu 204
  konveksna 67
  linearna 46

  logaritamski konveksna 258
  neprekidno diferencijabilna 43, 49, 57
  ograničene varijacije 207
  zeta (Rimanova) 24
Funkcije
  podjednako neprekidne 35
  uniformno ograničene 35
  uniformno ograničene varijacije 237

Gradijent 45
Gustina
  linearna 188
  površinska 215
  srednja 171

Helderova klasa 285
Helderovi uslovi 285
Hodograf 93
Homeomorfizam 113
  lokalni 113

Identitet
  Ležandrov 263
  Ojlerov 65
Integral
  apsolutno konvergentan 176
  donji (gornji) Darbuov 138, 145
  Dirihleov 252
  dvojni 136
  dvostruki 151
  Frenelov 255
  Furijeov 294
  Gausov 239
  krivolinijski prve vrste 184
  krivolinijski druge vrste 189
  Laplasov 264
  n-integral 136, 139, 144
  nesvojstveni 173
  nesvojstven parametarski 245
  nesvojstven, ravnomerno
    konvergentan 245
  Ojler-Poasonov 174
  Ojlerov 256
  površinski prve vrste 213
  površinski druge vrste 217
  Rabeov 262
  ravnomerno konvergentan 245
  Stiltjesov 204
  svojstven parametarski 241
  trojni 136
  uzastopni 150
Integrand 204
Integrator 204
Interval konvergencije 26
Inverzija 90
Izvod
  parcijalni 40
  parcijalni višeg reda 55
  po vektoru 66
  u pravcu 44
  vektorske funkcije 96
Izvor 223

Jakobijan 48

Koeficijenti
  Gausovi 120
  Furijeovi 272
Konhoida 128
Koordinate
  n-dimenzionalne sferne 166
  polarne 46, 157
  polarno cilindrične 158
  sferne 46, 159
  uopštene sferne 164, 180
Koordinatna linija 117, 157
Koordinatna površ 158
Kriterijum
  Abel-Dirihleov za integrale 247
  Abelov za redove 16
  Dinijev 283
  Dirihleov za redove 16
  Lipšicov 285
  Silvesterov 60
  Vajerštrasov za integrale 246
  Vajerštrasov za redove 15
Kriva 94
  deo-po-deo glatka 95
  glatka 95
  koja se može stegnuti u tačku 196
  orijentisana 95

rektificibilna 95
Vivijanijeva 94
Krivina
glavna površi 125
krive 100
srednja površi 126
Krug krivine 102
Kvadratna forma 60
druga 126
pozitivno (negativno) definitna 60
pozitivno (negativno) poludefinitna 60
promenljivog znaka 60
prva 120

Lagranžov metod multiplikatora 86
Lajbnicovo pravilo 243
Laplasijan 225
Laplasov operator 91, 225
Ležandrov polinom 271

Maksimum
(strogi) lokalni 59
uslovni 85
Matrica
Jakobijeva 48
kvadratne forme 60
simetrična 60
Mebiusova traka 114
Mera
intervala (Lebegova) 142
površi 168
segmenta (Žordanova) 130
spoljašnja 132
unutrašnja 132
Žordanova 132
Metrika
ravnomerna (uniformna) 32
srednjeg kvadratnog
odstupanja 269
Minimum
(strogi) lokalni 59
uslovni 85
Moment inercije 171
Monotoni pokrivač 172

Nabla 226
Norma linearne funkcije 46
Normala
glavna 103
površi 117
ravne krive 99
Normalni presek 123
Nejednakost
Adamarova 92
Beselova 273
Koši-Švarcova 268
Minkovskog 268

Oblast 39
elementarna 201, 231
(površinski) prosto povezana 196, 234
prostorno prosto povezana 234
Operacije drugog reda 225
Ortogonalne trajektorije 129
Ortogonalni vektori 270
Ortonormirana baza 276

Parametar
podele 136
prirodni 96
Parcijalni priraštaj 39
Parsevalova jednakost 275
Paskalov puž 128
Podela 131, 135
finija 131
grublja 131
sa istaknutim tačkama 136
Podsegment 131
Polukubna parabola 112
Poluprečnik
krivine 100
torzije 105
Polje
potencijalno 224
skalarno 192
solenoidalno 234
vektorsko 192
Ponor 223
Površ 113
deo-po-deo glatka 115
dvostrana 216

elementarna 113
glatka 114
jednostrana 217
prosta 113
Površina 168
Potencijal 224
vektorski 235
Pravougli n-paralelepiped 130
Princip
Kavalijerijev 179
Košijev za integrale 246
Košijev za familije funkcija 12
Košijev za funkcionalne redove 14
Rimanov lokalizacije 283
Prostor
Hilbertov 268
pred-Hilbertov 268
separabilan 33
Protok 220

Rad 193
Radijus konvergencije 26
Ravan
normalna 103
oskulatorna 103
rektifikaciona 103
tangentna 116
Red
binomni 31
Dirihleov 36
Furijeov 272
hipergeometrijski 36
obično (tačka-po-tačka)
konvergentan 13
ravnomerno (uniformno)
konvergentan 13
stepeni (potencijalni) 25
Tejlorov 30
Relacija paralelograma 299
Rimanova lema 282
Rotor 223

Segment 130
Simpleks 165
Sistem funkcija
funkcionalno nezavisan 81
funkcionalno zavisan 81
linearno zavisan 81
Sistem vektora
ortonormiran 270
potpun 276
trigonometrijski 271
Skalarni proizvod 267
Skup
Lebegove mere nula 142
merljiv po Žordanu 132
Suma
donja (gornja) Darbu-
Stiltjesova 209
donja (gornja) Darbuova 137
integralna 136, 140

Švarcov primer 180

Tačka
dvojna 111
eliptička 126
hiperbolička 126
istaknuta 136
izolovana 111
obična krive 110
obična površi 116
parabolička 126
povratna 111
samododira 112
singularna krive 110
singularna površi 116
stacionarna 60
Tangenta 97
Teorema
Abelova 29
Arcela-Askolijeva 35
druga Vajerštrasova 277
Grinova 201
Lebegova 143
Menijeova 124
o implicitnoj funkciji 69, 75
o inverznoj funkciji 79
o nezavisnosti integrala od puta 194
o smeni promenljivih 163
o srednjoj vrednosti 52, 53
o srednjoj vrednosti integrala 148

Pitagorina 270
prva Vajerštrasova 33
Rolova 66
Žordanova 236
Torzija 105
Totalna varijacija 207
Traktrisa 128
Transformacija
Furijeova 294, 298
inverzna Furijeova 298
kosinusna 294
Laplasova 264
sinusna 294
Vektor položaja 93
Zavojnica 95
cilindro-konusna 98
hiperbolička 127
Zbir
integralni 136, 140
Stiltjesov 203

LITERATURA

1. S. ALJANČIĆ: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd 1968.
2. T. M. APOSTOL: *Calculus I and II*, Blaisdell Publ. Co., New York 1961.
3. T. M. APOSTOL: *Mathematical Analysis* (2nd ed.), Addison Wesley Publ. Co., London 1974.
4. M. AŠIĆ, J. VUKMIROVIĆ: *Zbirka zadataka iz matematičke analize II*, Naučna knjiga, Beograd 1975.
5. H. CARTAN: *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Hermann, Paris 1967.
6. J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1960.
7. B. R. GELBAUM, J. M. H. OLMSTED: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, San Francisco 1964.
8. K. KNOPP: *Theory and Apllication of Infinite Series*, Blackie and Son, London 1951.
9. N. LAŽETIĆ: *Matematika II*, Naučna knjiga, 1 1991, 2 1994.
10. G. LEFORT: *Algèbre et analyse. Exercises* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1964.
11. S. MARDEŠIĆ: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, I 1974, II 1977.
12. M. MARJANOVIĆ: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd 1979.
13. D. PERIŠIĆ, S. PILIPOVIĆ, M. STOJANOVIĆ: *Funkcije više promenljivih. Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.
14. G. PÓLYA, G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (4. Aufl.), Springer, Berlin-Heidelberg, I 1970, II 1971.
15. S. RADENOVIĆ: *Matematička analiza II*, Zbirka rešenih ispitnih zadataka i zadataka za pripremu ispita, Beograd 1996.
16. W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill Co., New York 1964.
17. W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Co., New York 1966.
18. L. SCHWARTZ: *Analyse mathématiques I, II*, Hermann, Paris 1967.
19. M. SPIVAK: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York 1965.
20. E. C. TITCHMARSH: *The Theory of Functions* (2nd ed.), Oxford Univ. Press, Oxford 1939.
21. M. ZAMANSKY: *Introduction a l'algèbre et l'analyse modernes* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1963.